

The background of the cover is a microscopic image of cells, possibly yeast or similar microorganisms, stained with a blue fluorescent dye. The cells are oval-shaped and show internal structures like nuclei and vacuoles. The overall color scheme is a gradient of blue, from dark in the corners to lighter in the center.

FUNDAMENTOS FÍSICOS DE LOS PROCESOS BIOLÓGICOS

Raúl Villar

Cayetano López

Fernando Cussó

Fundamentos físicos de los procesos biológicos

Vol. 1 - Biomecánica y leyes de escala

Raúl Villar Lázaro
Cayetano López Martínez
Fernando Cussó Pérez

Fundamentos físicos de los procesos biológicos

© Fernando Cussó Pérez
Cayetano López Martínez
Raúl Villar Lázaro

Fig. Cubierta: Células HeLa teñidas con Hoechst, observándose núcleos en interfase y una metafase.
(Cortesía de Magdalena Cañete, Departamento de Biología, UAM)

ISBN: 978-84-15941-38-5

e-book v.1.0

ISBN edición en Papel: 978-84-9948-509-6

Edita: Editorial Club Universitario. Telf.: 96 567 61 33
C/. Cottolengo, 25 – San Vicente (Alicante)
www.ecu.fm

Maqueta y diseño: Gamma. Telf.: 965 67 19 87
C/. Cottolengo, 25 – San Vicente (Alicante)
www.gamma.fm
gamma@gamma.fm

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de este libro puede reproducirse o transmitirse por ningún procedimiento electrónico o mecánico, incluyendo fotocopia, grabación magnética o cualquier almacenamiento de información o sistema de reproducción, sin permiso previo y por escrito de los titulares del Copyright.

Introducción

Este libro, *Fundamentos físicos de los procesos biológicos*, se ha concebido como una ayuda para los estudiantes de los primeros cursos de titulaciones cuyo objeto de estudio principal sean las Ciencias de la Vida, como la Biología, la Medicina, la Farmacia, la Veterinaria y otras, en las que sea necesario manejar algunas nociones básicas de la Física. No se supondrá, por lo tanto, la existencia de ningún conocimiento previo en esta materia, circunstancia frecuente en quienes inician estudios en Ciencias de la Vida. Lo único que se presupone es el conocimiento de las matemáticas elementales correspondientes al nivel de bachillerato. De todas formas, se recuerdan algunos conceptos y fórmulas importantes en el texto y en los apéndices.

El contenido del libro resulta de una modificación de un libro anterior, escrito por los mismos autores, llamado *Física de los procesos biológicos* y publicado en 2004 por Ariel. La modificación principal consiste en la eliminación de las partes más generales de la Física y un enfoque más centrado en las aplicaciones al mundo de la Biología, lo que se ha traducido en una reducción neta de contenidos y una más estricta selección de estos en lo que afecta a la explicación de ciertos fenómenos biológicos. Una gran parte del texto que ahora presentamos es similar al anterior, aunque se ha cambiado el contexto en que se introducen algunas nociones de Física con objeto de hacerlas más directamente aplicables a las Ciencias de la Vida. Al mismo tiempo, se han incorporado más ejercicios para mejor adaptarse a los cambios que se están produciendo en el perfil y desarrollo de los estudios universitarios.

Con todo, sigue siendo y se ha construido como un libro de Física en el que se introducen los conceptos y la metodología propios de esta ciencia, aunque se busca, en todo momento, aplicar los resultados obtenidos al ámbito de los seres vivos. El hecho, además, de que no se requieran conocimientos previos en esta materia por parte del lector implica que cada tema sea presentado desde su inicio, indicando lo que significa en el mundo físico en general, con aplicaciones y ejemplos, y con un énfasis especial en el ámbito de las Ciencias de la Vida, a fin de mejor entender sus leyes y familiarizar al lector con el modo de tratar y formular los problemas físicos.

El programa, igual que el del texto anterior, cubre todos los contenidos mínimos u obligatorios de los programas de las carreras mencionadas en el primer párrafo, a desarrollar en uno o dos semestres. Pero va más allá, tanto en el desarrollo de cada tema como en el catálogo de temas, incorporando otros contenidos que serán de interés en estados más avanzados del estudio de la relación entre Física y Ciencias de la Vida. Intentamos que sirva de referencia permanente para aclarar las nociones de Física que aparecen una y otra vez en determinadas ramas del estudio de los seres vivos.

Para el estudiante y el público en general, la Física y la Biología se presentan como disciplinas científicas muy distintas, incluso contradictorias o incompatibles en sus métodos. Y es cierto que hay diferencias en su objeto de estudio, en su metodología y también en su lenguaje. La Física se ocupa normalmente de sistemas simples que se pueden caracterizar con unos pocos parámetros, incidiendo siempre en los aspectos cuantitativos de las leyes que rigen su comportamiento, lo que implica un alto grado de formalización matemática y un método deductivo a partir de unos principios generales, lo que le confiere una gran potencia predictiva. Por supuesto, se llega a esos principios generales desde la observación y la experimentación de los fenómenos naturales, es decir, tienen una naturaleza empírica, muy distinta de la de los postulados puramente matemáticos. La Biología, por su parte, se ocupa de los sistemas más complejos que existen en el mundo físico, los seres vivos, cuyo comportamiento no puede caracterizarse únicamente con ayuda de unos pocos parámetros y cuya estructura no puede entenderse fuera del marco evolutivo, de la historia concreta de la vida sobre este planeta, sujeta a contingencias impredecibles que cristalizan en las formas de vida actualmente existentes. La Biología es más descriptiva, menos deductiva, y su lenguaje no es el lenguaje altamente formalizado de las matemáticas.

Y, sin embargo, los seres vivos forman parte del mundo físico y, por lo tanto, se ven afectados por las leyes generales que rigen el comportamiento de cualquier sistema físico, ya sea la gravedad, la tensión superficial, los intercambios de energía, la dinámica de los fluidos o las interacciones electromagnéticas. El funcionamiento de los seres vivos y de sus distintos órganos y tejidos, su estructura y su relación con el entorno, están condicionados por las leyes generales de la Física, lo que constituye el nivel más básico de relación entre Física y Ciencias de la Vida. Existe otro nivel, más instrumental, que se refiere a la utilización, en los laboratorios de prácticas y de investigación, así como en otros ámbitos de la actividad profesional relacionados con las Ciencias de la Vida, de equipos e instrumentos basados en fenómenos físicos, o surgidos de la actividad de investigación en Física, que permiten observar ciertas características de los seres vivos. Ambos aspectos, básico e instrumental, están presentes en el libro.

Desde luego, sería absurdo pretender que entenderemos a los seres vivos si conocemos bien los fenómenos físicos en los que se basa su actividad vital. Se trata de sistemas tan complejos y con una componente “histórica” tan fuerte que, en nuestro estado actual de conocimientos, solo es posible formular en términos físicos algunos aspectos de su actividad y estructura. Pero también sería absurdo pensar que podemos entenderlos haciendo abstracción del mundo físico en el que viven y evolucionan y cuyas leyes les afectan. Es de gran importancia comprender que se trata de sistemas que deben ajustarse a lo estipulado por las leyes de la Física, desde las que se refieren a los átomos y moléculas que los constituyen, hasta las que regulan el comportamiento térmico y dinámico de conjuntos de muchas partículas y extrema complejidad. Las leyes de la Física plantean límites a la actividad vital que deben ser tenidos en cuenta, de forma que el juego de la evolución biológica debe discurrir dentro de esos límites. Como veremos en muchos de los casos tratados en el texto, lo difícil es plantear de forma correcta la aplicación de una ley física general al caso particular de un organismo o una función biológica.

En todo caso, la finalidad de las dos ciencias es idéntica: entender e interpretar los fenómenos naturales en términos de hipótesis que puedan ser confrontadas con la observación o el experimento. Aunque, teniendo en cuenta que la complejidad de los seres vivos es superior a la de cualquier sistema inanimado, la aproximación usual en la Física se enfrenta con numerosas limitaciones y requiere adaptaciones a su nuevo objeto de estudio. Lo que no obsta para que, cuando se dilucida el fenómeno físico que subyace a una determinada función vital, se entienda esta de forma clara, así como el espectro de alternativas posibles permitidas por las leyes de la Física y la lógica del proceso evolutivo que ha conducido a esa solución específica.

A los autores, científicos cuya disciplina de origen es la Física, nos resulta especialmente grato dejar constancia de que, durante nuestra experiencia docente en la materia y la preparación de este texto, hemos adquirido conciencia de las contribuciones que la Física, a lo largo de su historia, debe a numerosos biólogos, fisiólogos y médicos, especialmente en el desarrollo de las teorías termodinámicas y la física de fluidos.

Como se ha indicado anteriormente, el presente texto resulta de la modificación de un libro anterior. Afrontar una revisión y reelaboración de una obra con objetivos similares sólo es concebible si se ha recibido la justa combinación de elogios y críticas relativas al primer texto que nos ha permitido concluir que el esfuerzo merece la pena. Así que, además de los agradecimientos que figuran en esa primera obra a las personas que nos ayudaron en

la tarea de componerla, los autores nos sentimos en la obligación de añadir aquí nuestro agradecimiento a los muchos colegas y amigos que han tenido la generosidad de hacernos partícipes de sus opiniones y sugerencias de modificación, lo que nos ha ayudado a identificar tanto aquellos contenidos que debían cambiarse como aquellos merecedores de mantenerse en este nuevo empeño. En particular, Jose Manuel Calleja, Juan Rojo y Elena Escudero, quienes han realizado una detallada lectura de la obra y cuyos comentarios han resultado especialmente esclarecedores. Sin olvidar a Carmen Gilabert y Álvaro Moreno, que han corrido con la siempre peliaguda tarea de crear las ilustraciones que ayudan a mejor entender el texto. Huelga decir que los responsables de posibles deficiencias somos únicamente los autores. Por último, deseamos expresar nuestro agradecimiento a los estudiantes de Física del grado en Biología de la Universidad Autónoma de Madrid, que son responsables de muchos de los elogios y críticas a los que nos hemos referido, y que han constituido la principal referencia para juzgar la adecuación de nuestra descripción de los fundamentos físicos de los procesos biológicos.

Agradecimientos

Muchas son las personas que nos han ayudado en la tarea de componer este libro. Proponiéndonos temas o enfoques o leyendo capítulos o fragmentos y mejorándolos con sus sugerencias, como Magdalena Cañete, Ángeles Villanueva, Elena Escudero, José Manuel Calleja, Arkadi Levanyuk, Sebastián Vieira, Francisco Jaque, Gines Lifante y Cristina Bernis. O proporcionándonos fotografías, ilustraciones o referencias con las que completar el texto, como M. C. y A. V., ya citadas, Estrella Rausell, Rodolfo Miranda, Jorgina Satrustegui, Eduardo Elizalde, Tomás López, Isabel Jimeno, Nicolás Fernandez Baillo, Luis Munuera, José María Segura y José Manuel Suárez de Parga, así como el Servicio Interdepartamental de Investigación de la Universidad Autónoma de Madrid. Mención aparte merecen las personas que se han responsabilizado de las ilustraciones, una notable aportación sin la que el libro perdería una gran parte de su interés, sobre todo Carmen Gilabert, que ha debido plasmar gráficamente muchas de las ideas, y hasta los caprichos, de los autores, y Álvaro Moreno, así como E. E., ya citado, Carmen Morant y Eugenio Cantelar. Por último, es necesario agradecer a las numerosas promociones de alumnos de Biología que han debido cursar con nosotros la asignatura Física de los Procesos Biológicos en la UAM, por su paciencia, por sus sugerencias y por permitirnos hacernos una idea de cómo abordar esta disciplina. En realidad, hemos aprendido al mismo tiempo que ellos.

Índice general abreviado

Volumen I. Biomecánica y leyes de escala

- Capítulo 1. Cinemática. La percepción de la aceleración
- Capítulo 2. Dinámica. La fuerza en los animales
- Capítulo 3. Fuerzas elementales y derivadas. Entornos con fricción
- Capítulo 4. Bioestática y locomoción
- Capítulo 5. Trabajo y energía. La tasa metabólica
- Capítulo 6. Leyes de escala en los seres vivos
- Capítulo 7. El metabolismo y las leyes de escala
- Apéndices A-F

Volumen II. Calor y dinámica de fluidos en los seres vivos

- Capítulo 8. Temperatura, calor y trabajo
- Capítulo 9. El primer principio: balance energético de los seres vivos
- Capítulo 10. Procesos espontáneos: segundo principio de la termodinámica
- Capítulo 11. Transiciones de fase: la transpiración en los seres vivos
- Capítulo 12. Teoría cinética molecular de los gases: la difusión
- Capítulo 13. Fluidos ideales: la flotación
- Capítulo 14. El flujo viscoso: la circulación sanguínea y el vuelo
- Capítulo 15. Fenómenos de superficie y disoluciones
- Capítulo 16. Propiedades mecánicas de los biomateriales

Volumen III.- Bioelectromagnetismo, ondas y radiación

- Capítulo 17. Fuerzas, campos y potenciales eléctricos
- Capítulo 18. Corriente eléctrica
- Capítulo 19. La membrana celular y el impulso nervioso
- Capítulo 20. Magnetismo y campos electromagnéticos
- Capítulo 21. Ondas: luz y sonido
- Capítulo 22. La visión y los instrumentos ópticos
- Capítulo 23. Átomos, núcleos y radiactividad

Índice Volumen I.

Biomecánica y leyes de escala

Introducción	iii
Agradecimientos	vii
Índices	ix
Referencias generales	xiii
Capítulo 1. Cinemática. La percepción de la aceleración	1
1.1 Posición y trayectoria de un cuerpo	1
1.2 La velocidad	6
1.3 La aceleración	11
1.4 Ejercicios propuestos.....	39
1.5 Referencias	44
Capítulo 2. Dinámica. La fuerza en los animales	45
2.1 Las leyes de Newton	45
2.2 El origen de la fuerza en los animales.....	51
2.3 La conservación del momento.....	68
2.4 El centro de masas.....	77
2.5 Ejercicios propuestos.....	92
2.5 Referencias	98
Capítulo 3. Fuerzas elementales y derivadas. Entornos con fricción	101
3.1 La gravitación.....	102
3.2 Fuerzas de contacto	113
3.3 La fuerza centrífuga	117
3.4 Fuerzas de rozamiento.....	120
3.5 Ejercicios propuestos.....	140
3.6 Referencias	144

Capítulo 4. Bioestática y locomoción.....	147
4.1 Momento angular	147
4.2 Bioestática	175
4.3 La locomoción en los animales	187
4.4 Ejercicios propuestos	196
4.5 Referencias	209
Capítulo 5. Trabajo y energía. La tasa metabólica.....	211
5.1 Trabajo y energía cinética	211
5.2 La energía y los seres vivos.....	234
5.3 Movimiento en torno al equilibrio. Movimiento armónico simple.....	245
5.4 Apéndice - Cálculo de la potencia muscular específica.....	253
5.5 Ejercicios propuestos	255
5.6 Referencias.....	261
Capítulo 6. Leyes de escala en los seres vivos	263
6.1 Tamaño y forma	263
6.2 Análisis dimensional	268
6.3 Leyes de escala.....	271
6.4 El tamaño del esqueleto.....	282
6.5 La carga, el salto y la carrera.....	292
6.6 Ejercicios propuestos.....	306
6.7 Referencias	309
Capítulo 7. El metabolismo y las leyes de escala	311
7.1 La ley de Kleiber	312
7.2 El suministro energético.....	326
7.3 El tiempo biológico	335
7.4 Ejercicios propuestos	335
7.5 Referencias	340
Apéndices A - F.....	343
Glosario.....	387

Referencias generales

En cada capítulo se añade una lista de referencias específicas que tienen relación con algunos de sus contenidos, sean datos o desarrollos teóricos, que no suelen encontrarse en los libros generales de un nivel similar a éste. Además de estas referencias específicas, relacionamos a continuación una serie de textos conocidos y fácilmente accesibles, también pensados para estudiantes en los primeros años de estudios universitarios, tanto de Física como de carreras centradas en las Ciencias de la Vida.

Alonso, M. y Finn, E. J. (1995): *Física*, Addison-Wesley Iberoamericana.

Cromer, A. H. (1992): *Física para las Ciencias de la Vida*, Reverté.

Gettys, W. E., Keller, F. J. y Skove, M. J. (1991): *Física clásica y moderna*, McGraw-Hill.

Glashow, S. L. (1993): *From alchemy to quarks. The study of physics as a liberal art*, Brooks-Cole.

Jou, D., Llebot, J.E. y Pérez García, C. (1994): *Física para de las Ciencias de la vida*. McGraw-Hill.

Kane, J.W. y Sternheim, M.M. (1998): *Física*. Reverté.

Ortuño Ortín, M. (1996): *Física para biología, medicina, veterinaria y farmacia*. Crítica, 1996

Tipler, P.A. (1996): *Física*. Reverté.

Capítulo 1. Cinemática. La percepción de la aceleración

1.1 Posición y trayectoria de un cuerpo

1.1.1 Dimensiones del espacio

Vivimos en un mundo caracterizado por tener tres dimensiones espaciales y una temporal, lo que implica que **sólo podemos trazar tres líneas perpendiculares entre sí que coincidan en un punto y no más**. Por lo tanto, el primer paso en la descripción de los fenómenos físicos consiste en localizarlos, en dar cuenta de su posición y del tiempo en el que suceden. Localizar un cuerpo extenso no es fácil y puede hacerse de varias maneras aprovechando sus propiedades físicas, tales como su condición de sólidos, rígidos u otras. La forma más elemental de hacerlo es dar la posición de cada uno de los puntos que lo componen, así que empezaremos por describir la posición (y el movimiento) de un punto material, al que nos referiremos indistintamente como punto, partícula o cuerpo, en el bien entendido de que los objetos reales se componen de infinidad de estos puntos y que su movimiento resulta del movimiento de todos ellos. Más adelante, encontraremos algunos métodos de tratar de forma simple cuerpos extensos. En la práctica un punto material puede visualizarse como una partícula o pequeño cuerpo **cuyas dimensiones son mucho menores que las dimensiones características de su movimiento**, de forma que son irrelevantes y pueden considerarse aproximadamente cero. Así, por ejemplo, la Tierra, en su movimiento alrededor del Sol, puede perfectamente ser considerada como un punto material, ya que su diámetro es mucho más pequeño que el diámetro de la órbita terrestre. Por el contrario, las dimensiones de un átomo, del orden de 10^{-10} metros, son importantes cuando se estudian sus movimientos en una molécula debido a que las distancias interatómicas son del mismo orden que su diámetro.

1.1.2 Sistemas de referencia

La posición de un cuerpo no es una propiedad intrínseca del mismo, sino relativa a un objeto o conjunto de objetos, ligados a un observador, que se toman como sistema de referencia. Dada la estructura tridimensional del espacio, el sistema de referencia más útil y fácil de manejar es un conjunto de tres ejes perpendiculares que se cortan en un punto que tomamos como origen. Puede visualizarse un tal sistema con ayuda de las tres aristas que forman las paredes con el suelo de una habitación y que se juntan en uno de los vértices de la misma. Cada una de las tres direcciones asociadas a los tres ejes se llaman coordenadas y, convencionalmente, se les conoce por las letras x , y , z .

Definición. Sistema de referencia bien orientado. Un sistema de tres ejes perpendiculares X , Y , Z es dextrógiro o bien orientado si se ajusta a la llamada regla del sacacorchos, es decir, si al llevar por el camino más corto el primer eje, el X , sobre el segundo, el Y , un sacacorchos que gire en ese sentido, se mueve a lo largo del tercer eje, el Z .

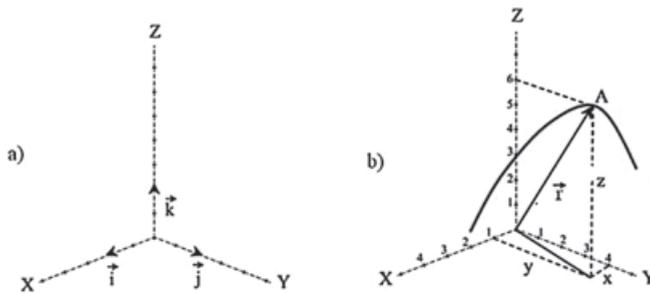


Fig 1.1. a) Sistema dextrógiro (bien orientado) de ejes coordenados con los tres vectores unitarios i , j , k . b) Trayectoria descrita por un móvil.

La posición de un punto en un instante de tiempo queda determinada por tres números, x , y , z , que son las componentes del vector posición \vec{r} que une el origen de coordenadas con el punto en cuestión (a partir de ahora, un símbolo con una pequeña flecha encima denotará siempre su carácter vectorial y será equivalente al conjunto de sus tres componentes). El módulo de dicho vector, que denotaremos normalmente con la misma letra pero sin flecha encima, o bien acotando el símbolo del vector con trazos verticales, será:

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Con el paso del tiempo, el cuerpo irá cambiando de posición, siendo su trayectoria la curva que resulta de unir todos los puntos por los que pasa. Esa trayectoria, que describe el movimiento del cuerpo, es la que sigue también el extremo del vector \vec{r} , por lo que, en términos matemáticos, viene caracterizada por la función $r, (t)$. El tiempo t se referirá, por su parte, al intervalo transcurrido desde un instante que, convencionalmente, se toma como origen de tiempos, hasta el instante en el que la partícula pasa por el punto de la trayectoria que estamos considerando.

Definición. Vectores unitarios. Llamamos vectores unitarios a los que tienen un módulo igual a la unidad y los denotaremos normalmente como \vec{u} . Así, los tres vectores unitarios a lo largo de los tres ejes coordenados serían, con esta nomenclatura, $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$. Es costumbre, sin embargo, utilizar la notación $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ para este caso particular. En el resto de los casos, utilizaremos siempre el símbolo \vec{u} para designar vectores unitarios. Así, el vector \vec{r} se escribirá como:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Cuando el movimiento tiene lugar a lo largo de una recta, se dice que es unidimensional. En ese caso puede siempre escogerse un sistema de coordenadas tal que uno de sus ejes coincida con la recta a lo largo de la cual tiene lugar el movimiento, con lo que todas las magnitudes vectoriales que lo caracterizan, por ejemplo la posición y la velocidad, tienen dos coordenadas que son siempre iguales a cero y basta una coordenada, la asociada a la dirección del movimiento, para describirlo por completo. Si elegimos el eje X como esta coordenada, entonces la trayectoria viene dada por una única función $x(t)$.

Puede ocurrir también que el movimiento describa una trayectoria contenida en un plano. Se dice, en este caso, que es bidimensional y, del mismo modo que en el caso anterior, conviene elegir un sistema de referencia tal que dos de sus ejes estén contenidos en dicho plano y el tercero sea perpendicular al mismo. Si definimos los ejes X, Y contenidos en el plano del movimiento, la coordenada z será siempre cero y bastarán dos coordenadas, $x(t), y(t)$, para describir por completo el movimiento.

1.1.3 Unidades de longitud y tiempo

Las coordenadas x, y, z , son distancias y, por lo tanto, deben ser expresadas en términos de longitudes. Pero **toda magnitud con dimensiones requiere de la existencia de una unidad**, en este caso la longitud de un objeto, o asociada a un cierto fenómeno físico fácilmente reproducible, que se toma

convencionalmente igual a 1 y respecto de la cual se comparan todas las demás longitudes. Las primeras magnitudes elementales, longitud y tiempo, están asociadas a la estructura espacio-temporal del mundo físico, pero no son las únicas. En lo sucesivo introduciremos otras dimensiones elementales, así como muchas otras magnitudes cuyas dimensiones son función de las elementales. La concurrencia de dimensiones implica que toda relación entre magnitudes debe ser homogénea dimensionalmente, ya que no pueden igualarse ni sumarse magnitudes con diferentes dimensiones. En general, **en una ecuación entre magnitudes físicas, los dos miembros deben tener las mismas dimensiones, así como los sumandos que aparezcan en cada uno de ellos.** Existe un sistema universalmente aceptado de unidades de medida para todas las magnitudes físicas llamado Sistema Internacional (*SI*), que es el que utilizaremos de forma consistente a lo largo de todo el libro, aunque a veces introduzcamos otras unidades que sean usadas por razones históricas o de comodidad, así como las reglas de equivalencia entre ellas. Para la longitud y el tiempo, las unidades del *SI* son el metro y el segundo.

Definición. El metro. La unidad de longitud metro fue introducida durante el siglo XVIII como la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París, desde el Polo Norte al Ecuador. Tras una serie de expediciones geofísicas y mediciones de la longitud de dicho arco de meridiano, se dispuso de un primer patrón que fue el depositado en 1799 en la Academia de Ciencias Francesa. Ese patrón y sus sucesivos refinamientos es el que perdura como unidad de longitud. Pero hoy sabemos que la Tierra no es exactamente una esfera. De hecho, la distancia entre el Polo Norte y el Ecuador a lo largo del meridiano que pasa por París, medida con ayuda de satélites geodésicos, es de 10.002.290 metros, es decir, el metro patrón de 1799 es 0,229 milímetros más corto que la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París, pero es el que ha pervivido hasta hoy. Posteriormente se fabricaron nuevos prototipos de materiales cada vez menos sensibles a las perturbaciones externas, y copias que se distribuyeron por los distintos países, pero siempre sobre el patrón de 1799. En 1960, sin embargo, se consideró que asociar la unidad de longitud a la distancia entre dos marcas en un barra metálica era poco preciso, y se introdujo una definición basada en un número de longitudes de onda en el vacío de un cierto tipo de radiación electromagnética. Posteriormente, en 1983, la Conferencia General de Pesos y Medidas partió de la velocidad de la luz para definir el metro como la longitud recorrida por la luz en un cierto intervalo de tiempo. Más concretamente, la definición hoy en vigor es:

El metro es la longitud recorrida por la luz en el vacío durante un intervalo de tiempo de $1/299.792.458$ segundos.

Nótese que esta definición implica fijar la velocidad de la luz a un valor exacto de 299.792,458 kilómetros por segundo.

Definición El segundo. *Las unidades de tiempo, por su parte, siempre han estado relacionadas con intervalos entre fenómenos astronómicos o la duración de ciertos ciclos observados en los cuerpos celestes. Así, el segundo se definió como 1/60 minutos, el minuto como 1/60 horas, la hora como 1/24 días, y el día como el tiempo que tarda, en promedio, la Tierra en girar por completo alrededor de sí misma. Como la duración de los giros terrestres no es constante y está sujeta a variaciones, se definió el segundo como la fracción 1/86.400 del día solar promedio hasta que, en 1960, se optó por una definición basada en parámetros atómicos, más precisa que la asociada al movimiento de la Tierra. Así, la definición oficial en vigor es la siguiente:*

El segundo es la duración de 9.192.631.770 periodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del cesio 133.

En todo caso, y a pesar de que estas definiciones sean necesarias para efectuar medidas de precisión, lo más importante desde el punto de vista práctico es comprender la necesidad de unidades de medida para las magnitudes físicas y, en lo que se refiere al metro y al segundo, interiorizar su valor aproximado en términos de la longitud comprendida entre las marcas del cero y de un metro en una cinta métrica, y del tiempo que marca el segundero de un reloj.

Es recomendable utilizar siempre en los cálculos las cantidades expresadas en unidades en el Sistema Internacional, lo que asegura su corrección y permite obtener resultados, de forma consistente, en las unidades de dicho sistema. Muchas veces es útil manejar múltiplos o submúltiplos de las unidades fundamentales, como, por ejemplo, el kilómetro o el centímetro. Los prefijos utilizados, con sus abreviaturas, vienen especificados en la tabla 1.1.

Tabla 1.1. Nombres y abreviaturas de múltiplos y submúltiplos

Prefijo	Factor	Prefijo	Factor
deca (da)	10	deci (d)	10^{-1}
hecto (h)	100	centi (c)	10^{-2}
kilo (k)	10^3	mili (m)	10^{-3}
mega (M)	10^6	micro (μ)	10^{-6}
giga (G)	10^9	nano (n)	10^{-9}
tera (T)	10^{12}	pico (p)	10^{-12}
peta (P)	10^{15}	femto (f)	10^{-15}

1.2 La velocidad

1.2.1 Definición

Un cuerpo puede recorrer una trayectoria lentamente (es decir, invirtiendo mucho tiempo en completarla) o rápidamente (invirtiendo poco tiempo). La magnitud que describe la mayor o menor rapidez con que se sigue una trayectoria es la velocidad, definida, en primera aproximación, como el cociente entre el espacio recorrido y el tiempo utilizado en recorrerlo. Afinando un poco más, puesto que la posición es una magnitud vectorial, definiremos la velocidad también como un vector, resultado de dividir el incremento del vector posición al pasar de un punto a otro de la trayectoria por el intervalo de tiempo transcurrido entre dichos puntos:

$$\vec{v}_{media} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

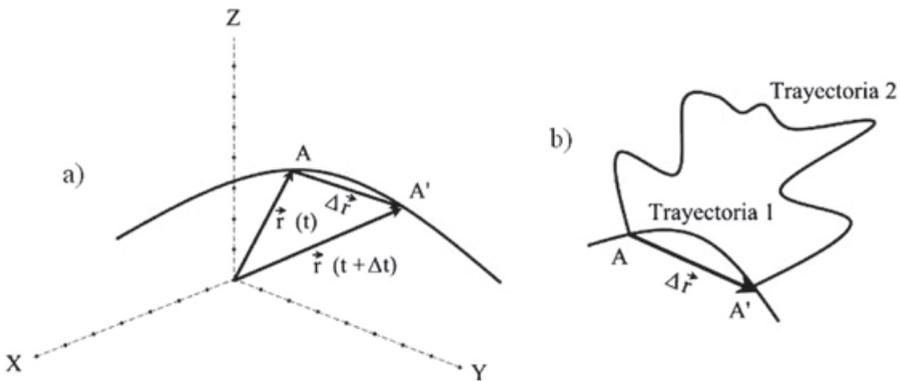


Fig. 1.2. a) Posiciones sucesivas de una partícula en los puntos A y A' alcanzadas en tiempos que difieren Δt , junto con la variación del vector posición, $\Delta \vec{r}$.

b) Dos trayectorias distintas se cruzan en dos puntos de forma que la variación del vector posición, $\Delta \vec{r}$, entre esos dos puntos es la misma, aunque los recorridos son distintos.

Lo que hemos definido es todavía un promedio vectorial de velocidades a lo largo de la trayectoria entre los dos puntos. Pero la velocidad puede variar a lo largo del recorrido y, además, la definición anterior no nos da información sobre la rapidez real con que se ha recorrido ese trozo de trayectoria, como puede verse en la figura 1.2.b, en la que la misma velocidad vectorial media describe dos movimientos muy distintos. Las insuficiencias de esta definición de velocidad serán tanto mayores cuanto más grandes sean los intervalos $\Delta \vec{r}$ y Δt escogidos. La verdadera noción de velocidad surge cuando estos intervalos se hacen cada vez más pequeños, hasta el límite en el que ambos son cero y su cociente tiende a un valor que no es otro que la derivada de la

función $\vec{r}(t)$ (es decir, las derivadas de las tres funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$) con respecto al tiempo.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \vec{j} + \frac{dz(t)}{dt} \vec{k} = v_x(t) \vec{i} + v_y(t) \vec{j} + v_z(t) \vec{k} \quad (1.1)$$

La magnitud así definida es la velocidad instantánea, la que tiene el cuerpo en cada instante y punto de la trayectoria y es, por lo tanto, una función del tiempo. La velocidad instantánea fue una noción extremadamente difícil de introducir y de entender en la Antigüedad, pero hoy en día su significado intuitivo está al alcance de todo el mundo al existir un instrumento, el velocímetro de los automóviles, cuya significación es evidente. Mide, precisamente, la velocidad instantánea del automóvil y por eso la aguja que marca la velocidad se mueve constantemente, al variar ésta en cada momento.

Puede verse en la figura 1.3 que cuando Δr se va haciendo más pequeño, su dirección tiende a confundirse con la de la trayectoria, hasta que, en el límite, la velocidad es un vector tangente en cada punto a la trayectoria.

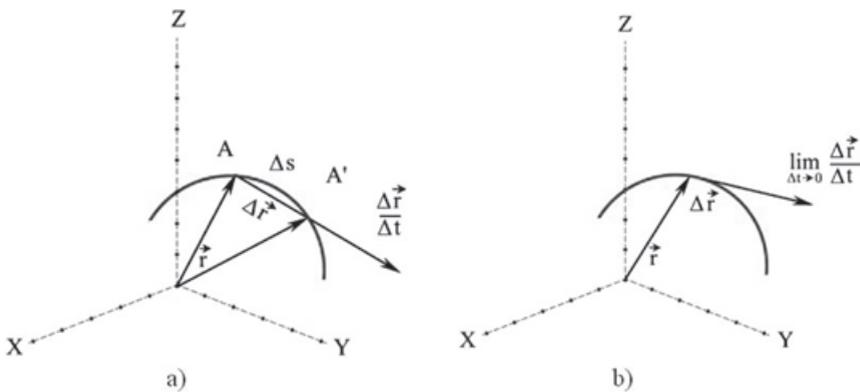


Fig. 1.3. a) Velocidad media (vectorial) entre los puntos A y A' de la trayectoria.
b) Velocidad instantánea en el punto A. Nótese que el límite de $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ es tangente a la trayectoria.

El módulo de \vec{v} se obtendrá, sencillamente, tomando los módulos de los dos miembros en la ecuación vectorial:

$$v = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Llamaremos Δs al intervalo de arco de una trayectoria a lo largo de la misma, es decir, la longitud de la trayectoria entre dos puntos. En el límite cuando el intervalo tiende a cero, la longitud de arco (infinitesimal), ds tiende al módulo de $d\vec{r}$, es decir:

$$v = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

De la definición de velocidad se sigue que sus dimensiones son longitud dividido por tiempo, es decir:

$$[v] = LT^{-1}$$

donde utilizamos el símbolo $[A]$ para denotar las dimensiones de la magnitud A . La unidad de velocidad en el Sistema Internacional es, por lo tanto, el m/s (metro por segundo).

Observación. La velocidad en kilómetros por hora. La unidad seguramente más utilizada en la vida cotidiana es el km/h (kilómetro por hora), cuya conversión a metros por segundo es inmediata:

$$1 \text{ km/h} = \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{1}{3,6} \text{ m/s}$$

o lo que es lo mismo, $1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$. Por consiguiente, para pasar de metros por segundo a kilómetros por hora hay que multiplicar por 3,6, mientras que para pasar de kilómetros por hora a metros por segundo hay que dividir por 3,6.

1.2.2 Velocidad de desplazamiento de los seres vivos

Entre los animales, la velocidad que pueden alcanzar mientras se desplazan varía mucho de unas especies a otras y depende de la situación en la que se encuentren, por lo que no es una variable bien definida. En efecto, podemos referirnos a los máximos alcanzables durante breves periodos de tiempo, en los momentos de acometida o de huida; o bien a velocidades sostenidas, y aún habría que especificar el intervalo de tiempo en el que el animal puede mantenerla. Así, el guepardo (*Acinonyx jubatus*) es el animal terrestre más rápido, pudiendo llegar hasta los 30 m/s (unos 110 km/h), pero sólo puede mantener esta punta de velocidad durante algo más de 250 m , alcanzando inmediatamente una temperatura corporal y un déficit de oxígeno que le hacen detenerse, pero puede sostener durante mucho más tiempo una velocidad de

unos 18 m/s (unos 64 km/h), que es muy elevada en comparación con la de otros felinos, más lentos en carrera sostenida.

Los hervíboros alcanzan velocidades considerables, aunque no los máximos del guepardo, pero pueden mantenerla durante más tiempo, como algunas especies de antílope (*Damaliscus*), cuya punta de velocidad puede superar los 90 km/h , el camello, el caballo, el ñu (*Connochaetes*) y ciertas gacelas (*Gazella*), hasta los 80 km/h , algunas variedades de liebres, que pueden llegar a los 70 km/h , que es una velocidad excepcionalmente alta para un animal de pequeño tamaño, o los venados y canguros, hasta los 48 km/h . Así, un felino sólo puede cazar a uno de estos hervíboros, que son sus presas habituales, si aprovecha el breve intervalo de tiempo en el que desarrolla su velocidad máxima, y aun así combinando la carrera con el salto. Los avestruces pueden alcanzar velocidades punta cercanas a los 80 km/h y los galgos pueden acercarse a los 60 km/h . El resto de los cánidos, como zorros o lobos, pueden llegar hasta unos 50 km en los momentos de máxima velocidad. Los elefantes pueden llegar también a los 40 km/h , pero sólo en arrancadas muy cortas, mientras que su velocidad en carrera sostenida es del orden de los 15 km/h y unos 7 km/h durante su marcha normal. Los ratones y pequeños roedores llegan a velocidades máximas entre los 10 km/h y los 20 km/h .

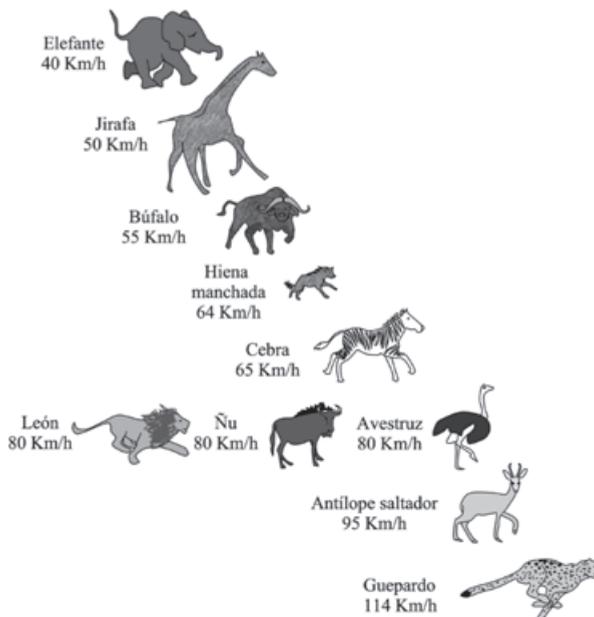


Fig. 1.4. Velocidades máximas alcanzadas por algunos animales africanos.

Los humanos se desplazan caminando a una velocidad del orden de 1 m/s . Los mejor dotados para la carrera y bien entrenados llegan a moverse a unos $10 \text{ m/s} = 36 \text{ km/h}$ sobre distancias no superiores a los 200 m , aunque hay momentos en los que pueden alcanzar los 45 km/h . Para distancias más largas, del orden de varios kilómetros, con un entrenamiento adecuado se puede mantener una velocidad sostenida de cerca de 20 km/h .

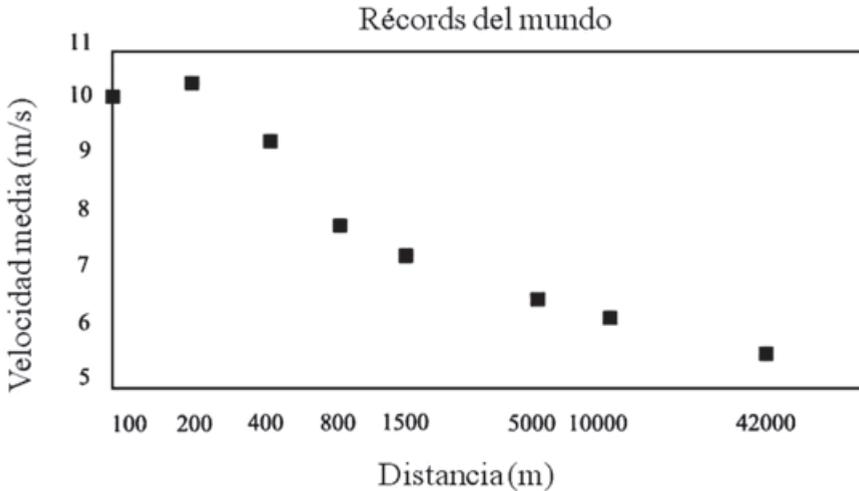


Fig. 1.5. Velocidad media en función de la distancia recorrida para los récords del mundo de atletismo, de 100 m a 42 km (Maratón).

Las aves pueden moverse más rápidamente que los animales terrestres debido a que no tienen que desplazar las extremidades sobre el suelo y a la forma aerodinámica que pueden adoptar. Las rapaces, como los halcones (*Falconidae*) o las águilas (*Accipitridae*), pueden llegar a alcanzar, mientras caen en picado hacia una presa minimizando la superficie de fricción con el aire, hasta unos increíbles 250 km/h a 300 km/h .

Los animales marinos, por el contrario, deben moverse en un medio que ofrece mucha mayor resistencia que el aire y, por esa razón, alcanzan velocidades menores. Entre los más veloces se encuentran algunas especies de tiburones que pueden llegar hasta cerca de los 50 km/h , mientras que los delfines se sitúan en los 20 km/h y las focas en algo más de los 10 km/h . Las gigantescas ballenas azules pueden mantener una velocidad de crucero de unos 20 km/h , pero cuando entran en situación de alarma y quieren alejarse lo más rápido posible de algún peligro potencial pueden llegar hasta los 48 km/h .

Un parámetro que puede ser comparado entre animales de muy diferente tamaño y estructura anatómica es la velocidad a la que se produce la transición entre la marcha, que es la fase de desplazamiento terrestre durante la cual siempre hay alguna extremidad en contacto con el suelo, y la carrera, que es la fase aérea, en la que hay muchos momentos en los que no existe ese contacto. La velocidad de transición es propia de cada especie y es una función monótona del tamaño del animal, según una ley que veremos en otro capítulo. La velocidad de transición para los ratones es del orden de los 2,5 km/h, la de los perros varía entre los 6 km/h y los 15 km/h, la de los humanos se sitúa alrededor de los 9 km/h y la de los caballos es del orden de los 25 km/h.

1.3 La aceleración

1.3.1 Definición

Normalmente los cuerpos no se mueven con velocidad constante, sino que ésta varía. La magnitud que mide la variación de la velocidad en función del tiempo se llama aceleración y se define también localmente en cada punto de la trayectoria haciendo el límite del cociente entre el incremento de la velocidad y el intervalo de tiempo en el que se produce dicho incremento:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad (1.2)$$

La aceleración es, por lo tanto, una nueva magnitud vectorial cuyas dimensiones son

$$[a] = LT^{-2}$$

que, en el Sistema Internacional, se expresa en m/s^2 (metros por segundo al cuadrado).

Observación. La aceleración de la gravedad. La aceleración de la gravedad, al nivel del mar, es un vector que apunta hacia el centro de la Tierra de módulo $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$, que redondearemos normalmente a $9,8 \text{ m/s}^2$.

Ya veremos que **la aceleración que adquiere un cuerpo es la magnitud dinámica básica al estar determinada por las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo**. Si conociéramos la aceleración en función del tiempo podríamos deducir la trayectoria que sigue la partícula siempre que sepamos cuáles son las condiciones iniciales, es decir, la posición y la velocidad del cuerpo en

un tiempo dado que tomaremos siempre, por comodidad, como origen de tiempos, $t = 0$.

1.3.2 El movimiento uniforme y rectilíneo

La aceleración es el parámetro que caracteriza el tipo de trayectoria que sigue un cuerpo, por lo que describiremos a continuación los tipos de movimiento ligados a aceleraciones simples. El más sencillo es el asociado a una aceleración cero. La expresión de la velocidad y de la posición en función del tiempo y de las condiciones iniciales es inmediata. En efecto, para el caso $a = 0$, tenemos que:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$$

por lo que \vec{v} no dependerá del tiempo y será una constante. Si fijamos como condición inicial $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$, entonces el cuerpo se moverá siempre con esa misma velocidad:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0$$

Ahora, de la definición de velocidad se sigue que:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

de donde podemos despejar $\vec{r}(t)$, con el resultado:

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \text{constante}$$

y, fijando la posición inicial $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, llegamos a la expresión final de la posición en función del tiempo (es decir, la trayectoria) de forma unívoca en función de la posición y velocidad iniciales:

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$$

La velocidad es un vector, por lo que el que sea constante a lo largo de toda la trayectoria implica que lo son sus tres componentes y, en consecuencia, tanto su módulo como su dirección. **Cuando un cuerpo se mueve a lo largo de una trayectoria con una velocidad cuyo módulo es constante se dice que el movimiento es uniforme.** La constancia de la dirección de la velocidad implica, por otra parte, que el cuerpo se desplaza necesariamente a lo largo de una recta, por lo que **el movimiento asociado a una aceleración nula es uniforme y rectilíneo, es decir, unidimensional.** Escogiendo ahora un sistema de coordenadas tal que uno de los ejes coincida con la recta a lo largo de la

cual se desplaza el cuerpo, podemos describirlo por completo con ayuda de una sola coordenada, por ejemplo la x .

Así, para el caso de aceleración cero, basta siempre con un conjunto de dos ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned}v(t) &= v_0 \\x(t) &= x_0 + v_0 t\end{aligned}$$

Observación. El reposo. *El reposo es el caso particular de movimiento uniforme y rectilíneo en el que la velocidad inicial $v_0 = 0$. Siempre que nos refiramos a casos de movimiento uniforme y rectilíneo debemos recordar que el reposo es un caso particular de este tipo de movimiento, dependiendo de las condiciones iniciales o, como veremos más adelante, de la elección del sistema de referencia.*

1.3.3 El movimiento uniformemente acelerado

El caso más simple, aparte del movimiento uniforme y rectilíneo, es el asociado a una aceleración constante, que recibe el nombre de uniformemente acelerado. Muchas veces es posible aproximar un movimiento complicado, por ejemplo el que sirve para darse impulso en un salto, suponiendo que se produce con una aceleración constante que sería, en casos como éste, una aceleración promedio. Si la aceleración \vec{a} es constante (como magnitud vectorial, es decir, en módulo y en dirección), la velocidad tiene la forma:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t \quad (1.3)$$

y, a partir de estas expresiones, también podemos encontrar la ecuación de la trayectoria, es decir, la posición en función del tiempo:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \quad (1.4)$$

Nótese, de la ecuación (1.3), que la velocidad $\vec{v}(t)$ es un vector contenido en un mismo plano para todo instante t , ya que es la suma de un vector fijo, \vec{v}_0 , y otro que varía con el tiempo pero es siempre proporcional a \vec{a} , tal y como puede verse en la figura 1.6. Ahora bien, como la velocidad es un vector tangente a la trayectoria en cada punto, ésta debe ser una curva plana, es decir, contenida íntegramente en un plano.

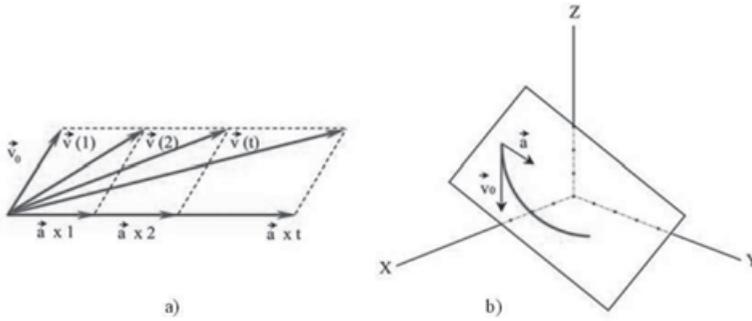


Fig. 1.6. a) La velocidad en un movimiento uniformemente acelerado para los instantes 1 s y 2 s y t. En todos los casos está contenida en el plano que forman la velocidad inicial y la aceleración. b) El movimiento uniformemente acelerado transcurre siempre en el plano que forman la velocidad inicial y la aceleración.

El caso más general de movimiento uniformemente acelerado es, por lo tanto, bidimensional, contenido en el plano definido por la velocidad inicial y la aceleración, y siempre podremos elegir un sistema de referencia tal que dos de sus ejes estén contenidos en ese plano y la tercera coordenada sea irrelevante. Para el caso en el que la velocidad inicial sea cero, o bien sea un vector paralelo a la aceleración, el plano del movimiento se reduce a la recta que contiene la aceleración y el movimiento es unidimensional, a lo largo de la misma. Estudiaremos primero este caso.

Movimiento uniformemente acelerado en una dimensión

Escogemos como eje X la recta que contiene a la aceleración y las ecuaciones vectoriales del caso general se reducen a una sola dimensión:

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

donde todos los parámetros, v_0 , a , y x_0 , pueden tener valores positivos o negativos según se sitúen en el eje X, cuya dirección convenimos en definir como positiva hacia la derecha. Si queremos encontrar una relación entre posición y velocidad en cada punto de la trayectoria, no tenemos más que eliminar la variable tiempo entre estas dos ecuaciones. Es decir, despejando t de la primera y sustituyendo en la segunda:

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$x = x_0 + \frac{v_0(v - v_0)}{a} + \frac{a}{2} \left(\frac{v - v_0}{a} \right)^2 = x_0 + \frac{2v_0v - 2v_0^2 + v^2 - 2vv_0 + v_0^2}{2a} = x_0 + \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

de donde:

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \quad (1.5)$$

El caso más frecuente es el del movimiento de cuerpos bajo la acción de la gravedad terrestre, caracterizados por una aceleración aproximadamente constante dirigida a lo largo de la dirección vertical, siempre hacia abajo. Si identificamos ahora el eje Y con la dirección vertical y , como es usual, escogemos el sentido positivo del mismo hacia arriba, la aceleración tendrá un valor $-g$, con $g \simeq 9,8 \text{ m/s}^2$. Las velocidades v y v_0 deben entenderse ahora como velocidades a lo largo de dicho eje, positivas cuando son hacia arriba y negativas hacia abajo según la convención adoptada. La ecuación (1.5) se escribirá ahora:

$$v^2 - v_0^2 = -2g(y - y_0) = 2g(y_0 - y) \quad (1.6)$$

Si, por ejemplo, tomamos como origen el punto en el que el eje Y corta el suelo y dejamos caer un cuerpo que estaba en reposo ($v_0 = 0$) desde una altura inicial y_0 , la velocidad a la que llegará al suelo ($y = 0$), en el supuesto de que no haya rozamiento con el aire, será:

$$v = \sqrt{2gy_0} \quad (1.7)$$

Ejemplo. Si aplicamos esta ecuación a una bola de vidrio, de acero o de otro material denso, de forma que el rozamiento con el aire sea pequeño, que dejamos caer desde una altura de 1 m, la velocidad con la que llegará al suelo es $v = \sqrt{2 \times 9,8 \times 1} = 4,4 \text{ m/s} = 15,9 \text{ km/h}$.

Ejemplo. El saltamontes. Los saltamontes y las langostas (Acrididae) son capaces de alcanzar, en ausencia de rozamiento con el aire, unos 45 cm en salto vertical. A partir de este dato y de la ecuación (1.6) es posible encontrar la velocidad con que necesita despegar del suelo. En efecto, el punto de máxima altura está caracterizado por una velocidad cero, ya que es el punto en el que el animal, que se movía con velocidad ascendente (positiva), se para momentáneamente justo antes de caer con velocidad descendente (negativa). Es decir, $v = 0$ cuando $y = 0,45 \text{ m}$. Como parte desde el suelo, $y_0 = 0$, resulta que

$$v_0 = \sqrt{2gy} \approx 3,0 \text{ m/s}$$

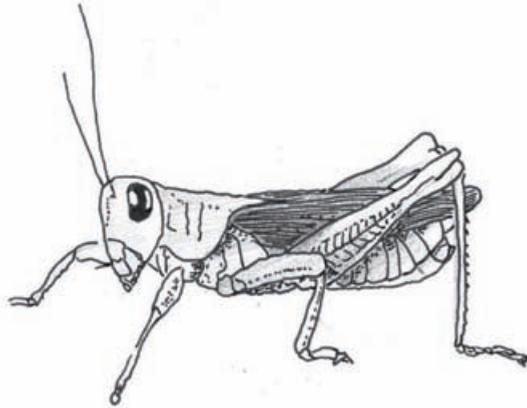


Fig. 1.7. Saltamontes. Nótese los potentes músculos del fémur en las patas saltadoras.

Para llegar a despegar con esta velocidad, el saltamontes ha tenido que flexionar sus patas y luego extenderlas imprimiendo así un movimiento que podemos tomar como uniformemente acelerado hacia arriba durante el tiempo que dura la extensión. La longitud a lo largo de la cual el movimiento se acelera hasta llegar a la velocidad de despegue es del orden de magnitud de la longitud de las patas, pongamos unos 3 cm. Podemos ahora calcular la aceleración que el saltamontes necesita imprimir a su cuerpo para llegar a dicha velocidad:

$$a = \frac{v^2}{2s} = \frac{3,0^2}{2 \times 0,03} \approx 150 \text{ m/s}^2 \approx 15 g$$

donde g es la aceleración de la gravedad. El tiempo de aceleración es

$$t = \frac{v_0}{a} = 0,02 \text{ s}$$

El salto en los animales

Muchos animales están especialmente dotados para el salto como modo de huir de los depredadores, de desplazarse o de alcanzar a sus presas. Concentrándonos en el salto en vertical, resulta que, por razones que veremos más adelante, las capacidades saltadoras son bastante independientes del tamaño. **Para animales isométricos, es decir, que tienen la misma forma aunque de distinto tamaño, la velocidad de despegue que pueden alcanzar es la misma y, por lo tanto, si no hubiera rozamiento llegarían exactamente a la misma altura.** Así, un pequeño canguro de 30 cm de altura puede llegar a saltar 2 metros, lo mismo que un canguro de más de 1,5 metros de altura. Animales de proporciones distintas pueden alcanzar velocidades de despegue distintas, pero su rango de variación no es muy grande. Una pulga (*Siphonaptera*) del género

Pulex, por ejemplo, puede llegar a saltar unos 25 cm en vacío (en aire alcanza algo menos de 20 cm debido al rozamiento que, para un animal tan pequeño, es muy grande), es decir, cerca de unas 200 veces su propia altura.

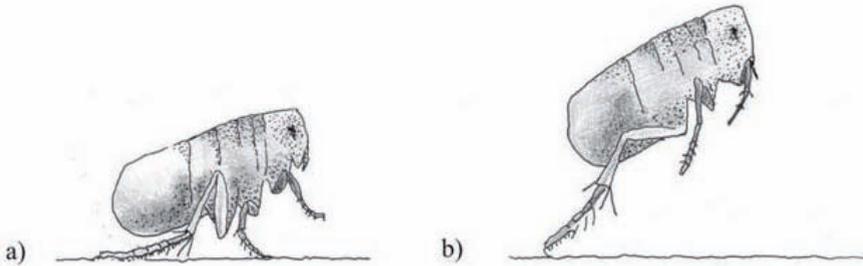


Fig. 1.8. Esquema de una pulga (*Spilopsyllus*) de 1,5 mm de longitud. a) Un milisegundo antes de saltar. b) Durante el primer milisegundo de vuelo.

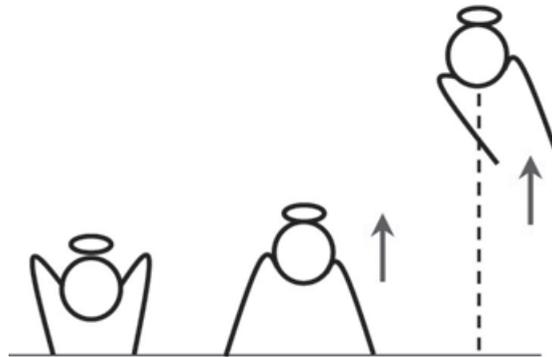


Fig. 1.9. Fases de flexión, despegue y vuelo de una pulga.

Una persona, por el contrario, salta en vertical apenas 60 cm, que es mucho menos que su propia altura. Quizá esta afirmación resulte extraña, teniendo en cuenta que el récord de salto de altura se sitúa más allá de los 2,40 m, pero en un salto atlético el centro de gravedad del atleta parte, en el momento del despegue, de una altura inicial superior a un metro, se toma carrerilla y se convierte parte de la velocidad de carrera en velocidad vertical gracias a la recuperación elástica de los tejidos de las piernas y, además, la técnica del salto permite girar el cuerpo alrededor del listón y superarlo aunque se encuentre por encima del centro de gravedad del saltador. En un salto en vertical puro, el único impulso es el que se da al flexionar y luego extender las piernas. Si tras el impulso inicial se mantienen las piernas extendidas, los pies difícilmente superarán los 60 cm de separación del suelo. El rozamiento con el aire, para el caso de una persona, es irrelevante, por lo que podemos calcular directamente

la velocidad de despegue, unos $3,4 \text{ m/s}$, no muy distinta de la alcanzada por el saltamontes. Sin embargo, el espacio y el tiempo de aceleración son mucho mayores para una persona que para un animal de pequeño tamaño, por lo que las aceleraciones que deben imprimir a su movimiento de impulso son muy distintas, como puede verse en la tabla 1.2.

Tabla 1.2. Características del salto de algunos animales

Magnitud	Pulga	Escar. de resorte	Saltamontes	Rana	Gálago	Persona
Masa	0,5 mg	40 mg	0,44 g	10 g	200 g	70 kg
Altura de salto	25 cm	33 cm	45 cm	40 cm	220 cm	60 cm
Distancia de aceleración	0,075 cm	0,077 cm	3 cm	4 cm	30 cm	50 cm
Velocidad de despegue	2,2 m/s	2,5 m/s	3,0 m/s	2,8 m/s	6,6 m/s	3,4 m/s
Tiempo de despegue	0,0007 s	0,0006 s	0,02 s	0,03 s	0,09 s	0,29 s
Aceleración	3.200 m/s^2	4.200 m/s^2	150 m/s^2	98 m/s^2	72 m/s^2	12 m/s^2
Ac. en términos de g	330 g	429 g	15 g	10 g	7 g	1,2 g

Las alturas de salto no se corresponden a los valores reales, que son bastante menores en los animales más pequeños debido al rozamiento con el aire, sino que son las que alcanzarían aproximadamente en ausencia de rozamiento.

Nótense las enormes aceleraciones que alcanzan los animales más pequeños para llegar, a lo largo de una diminuta longitud de aceleración, hasta velocidades de despegue de entre 2 m/s y 3 m/s . Las aceleraciones, que se dan en m/s^2 y también en términos de la gravedad terrestre g , pueden acercarse a los $500 g$, que es el límite aproximado de resistencia a la destrucción de los tejidos blandos y los órganos internos. No podrían producir una mayor aceleración porque la organización interna de sus cuerpos se desmoronaría. En los humanos, aceleraciones del orden o superiores a $10 g$ producen ya daños irreversibles.

Los campeones, en cuanto a aceleración de despegue, son los escarabajos de resorte y las espumadoras o chinches babosas. El escarabajo de resorte

(*Elateridae*) cuando se encuentra en posición invertida, con el abdomen hacia arriba, curva el dorso y pone en marcha un mecanismo de recuperación elástica que permite a algunos de ellos, como los del género *Athous*, saltar hasta 30 cm en aire desarrollando aceleraciones de despegue de más de 400 g. Por su parte, la chinche babosa (*Philaenus spumarius*) tiene una longitud de unos 6 mm y es capaz de elevarse a alturas de entre 40 cm y 70 cm, generando en la fase de impulso aceleraciones del mismo orden que el escarabajo de resorte (unos 400 g).

Lo llamativo no está sólo en las aceleraciones que alcanzan estos animales, sino también en el corto intervalo de tiempo del que disponen en la fase de despegue, menos de una milésima de segundo para una pulga o un escarabajo de resorte. Pero es imposible que una fibra muscular se contraiga tan rápidamente, así que en los animales saltadores más pequeños ha surgido evolutivamente un procedimiento para darse impulso distinto a la contracción muscular directa. Se trata de un mecanismo de catapulta por el que se acumula la energía de contracción de los músculos en un dispositivo que actúa como un muelle y que, cuando se suelta, dispara al animal hacia arriba. Es exactamente lo que ocurre cuando un arquero flexiona el arco utilizando su fuerza muscular durante un cierto intervalo de tiempo y luego éste recupera su forma original, en un tiempo mucho menor, impulsando la flecha con una velocidad que no podría nunca ser alcanzada mediante la acción directa del brazo.

El dispositivo utilizado por estos pequeños animales está constituido por una pieza de resilina, una proteína con propiedades elásticas parecidas a las del caucho, capaz de almacenar energía elástica en volúmenes diminutos; por ejemplo, el resorte de resilina de una pulga tiene una masa aproximada 4.000 veces menor que la masa total de la pulga.

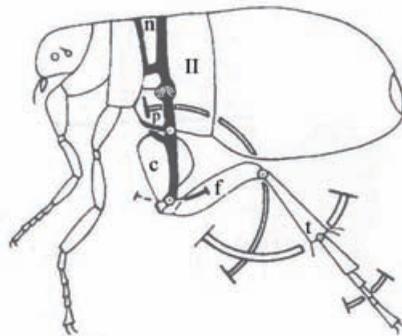


Fig. 1.10. Esquema de los elementos principales del esqueleto de una pulga (*Pulex*) que participan en el salto. El bloque de resilina (II) se sitúa entre el notum o tergo (n) y la pleura (p). También se representan la coxa (c), el fémur (f) y la tibia (t). Bennet-Clark y Lucey (1967).

Las cualidades elásticas de este caucho proteico, rico en glicocola, son comparables o superiores a las de los mejores cauchos sintéticos, pudiéndose alargar hasta varias veces su longitud en reposo de forma reversible, sin deformaciones permanentes. La resilina se encuentra también en la base de las alas de muchos insectos voladores y sus propiedades elásticas sirven también para mantener la frecuencia de movimiento de las alas. Muy probablemente, las estructuras de resilina adaptadas al salto en los artrópodos sean una derivación evolutiva de las que servían para el vuelo.

Los animales como la pulga, el escarabajo de resorte o la espumadora acumulan energía comprimiendo lentamente la estructura de resilina con sus músculos y bloqueándola en la posición previa al salto mediante un mecanismo de sujeción. Cuando este mecanismo se desconecta, la resilina actúa como un muelle y libera rápidamente la energía almacenada extendiendo las patas mucho más rápidamente de lo que haría la contracción muscular simple sin almacenamiento de resorte. Los animales pequeños, como las pulgas, basan sus capacidades para el salto en los mecanismos tipo catapulta de sus patas saltadoras, mientras que en el saltamontes, más grande y con tiempos de despegue en un factor superior a 30, se sirven de un mecanismo mixto, en el que una parte de la aceleración la producen mediante la acción directa de los músculos de sus patas saltadoras, muy poderosos en el fémur, y otra parte mediante resortes de una proteína elástica con propiedades similares a las de la resilina. En los saltamontes, en particular, el principal elemento elástico se encuentra en una estructura llamada proceso semilunar situada en la junta de la rodilla.

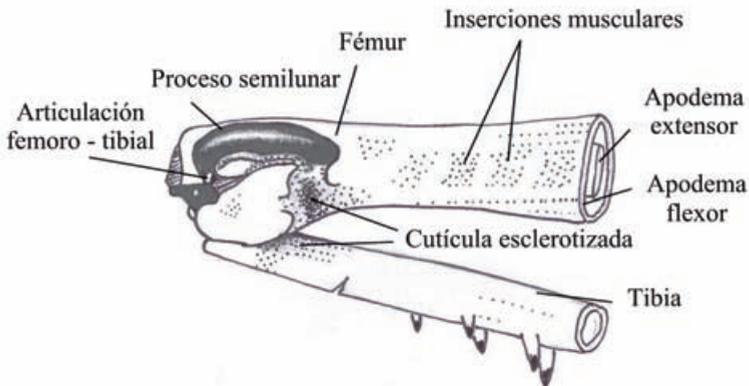


Fig. 1.11. Articulación del fémur y la tibia (“rodilla”) en la pata saltadora de un saltamontes. El proceso semilunar y, en menor medida, el apodema extensor son las estructuras que acumulan energía elástica en la flexión de la articulación para luego liberarla en el momento del salto. Bennet-Clark (1975).

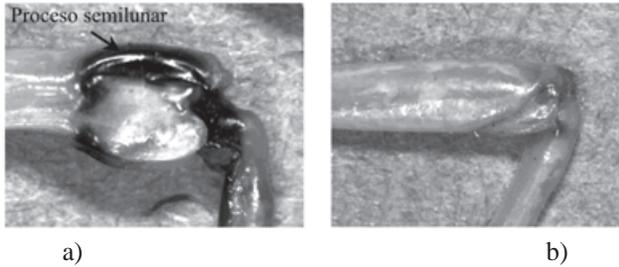


Fig. 1.12 a) Región de la “rodilla” en la pata trasera, saltadora, del saltamontes *Schistocerca gregaria* mostrando la estructura en la que se aloja el proceso semilunar.
 b) La misma región en la pata intermedia, no saltadora, del animal en la que esa estructura no existe. Heitler (1999).

Puede apreciarse, a simple vista, la diferencia entre las articulaciones de las patas saltadoras (traseras) y las de las patas intermedias, que no sirven para saltar, de la *Schistocerca gregaria* de la figura 1.12. Hay otros ortópteros, en particular algunos grillos de la familia *Tettigoniidae*, que no poseen mecanismos de catapulta y los sustituyen con patas desproporcionadamente largas para prolongar el tiempo de aceleración y conseguir grandes velocidades de despegue.

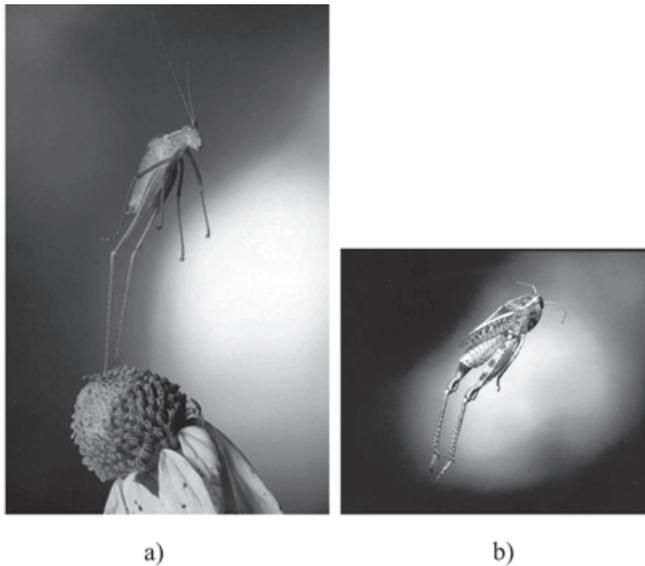


Fig. 1.13. a) Los grillos (*Tettigoniidae*) tienen patas más largas que los saltamontes (*Acrididae*). Parece improbable que la articulación de la “rodilla” sea suficientemente ancha como para albergar una estructura elástica similar a la que se encuentra en las articulaciones del saltamontes, pero la notable longitud de las patas incrementa la longitud y la duración de la fase de aceleración. En la foto puede verse un *Leptophyes punctatissima* a punto de iniciar el despegue.
 b) En el saltamontes *Calliptamus* de la figura se aprecia el ensanchamiento de la “rodilla” en el que se aloja la estructura elástica que sirve para aumentar la potencia del salto. Brackenbury (1992).

En los animales que utilizan este tipo de dispositivos, los saltos se suceden de forma discontinua, ya que es preciso almacenar energía comprimiendo los resortes entre salto y salto. La pulga, por ejemplo, tarda aproximadamente una décima de segundo en plegar las patas saltadoras y almacenar energía, manteniéndolas en posición de bloqueo durante dos centésimas de segundo, mientras que el impulso para saltar dura menos de una milésima de segundo.

Los animales más grandes, incluidos todos los mamíferos, adquieren la aceleración necesaria para despegar mediante la acción simple de los músculos de las piernas. En los casos del gálgalo (*Galago senegalensis*), que son primates saltadores de pequeño tamaño de la familia *Lorisoidea*, o de los canguros, la altura que alcanzan es sensiblemente superior a la del resto de los animales, debido a que su configuración corporal es tal que los músculos activados al saltar suponen una fracción de la masa total del cuerpo muy superior a lo habitual en el resto de los animales, como puede verse en la figura 6.16 del capítulo 6. Están, así, especialmente adaptados al salto.

Movimiento uniformemente acelerado en dos dimensiones

Dado que el caso más general de movimiento uniformemente acelerado está siempre contenido en un plano, elegiremos los ejes X, Y dentro del plano que forman la velocidad inicial y la aceleración. Consideraremos también, desde el principio, que la aceleración a que está sometido el móvil es la gravedad terrestre, es decir, $\vec{a} = (0, -g)$, con $g = 9,8 \text{ m/s}^2$. Tomaremos el origen de coordenadas de forma que la coordenada $x = 0$ coincida con la abscisa del móvil en el instante inicial, es decir, $x_0 = 0$, y el sentido positivo del eje X con el sentido de la componente x de la velocidad inicial, mientras que la coordenada $y = 0$ estará a la altura del punto de caída. Como puede verse en la figura 1.4. A partir de la expresión general (1.4), las ecuaciones del movimiento son, en este caso:

$$x(t) = v_{0x}t \quad (1.8)$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1.9)$$

$$v_x = v_{0x} \quad (1.10)$$

$$v_y = v_{0y} - gt \quad (1.11)$$

donde y_0 es la ordenada del móvil en el instante inicial y v_{0x}, v_{0y} son las componentes de la velocidad inicial, que pueden escribirse en función del

módulo de la velocidad, v_0 , y del ángulo α que forma el vector $\overline{v_0}$ con la horizontal:

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad (1.12)$$

$$v_{0y} = v_0 \operatorname{sen} \alpha \quad (1.13)$$

Las ecuaciones (1.8-9) son la expresión de lo que se llama trayectoria cinemática, que nos dan las coordenadas del móvil en cada instante, pero con frecuencia interesa únicamente la trayectoria geométrica, es decir, la forma de la curva que describe, independientemente del tiempo en que se pase por cada uno de sus puntos. La forma que contiene más información es, por supuesto, la trayectoria cinemática, pudiéndose pasar de ésta a la geométrica, pero no al contrario.

El procedimiento de pasar de la trayectoria cinemática a la geométrica es muy simple. Basta eliminar el tiempo del conjunto de las ecuaciones que la caracterizan. Así, para una trayectoria tridimensional, descrita por las tres ecuaciones que dan las componentes x, y, z en función del tiempo, eliminar la variable t despejándola de una de ellas y sustituyendo en las otras dos nos da un par de ecuaciones que describen una curva en el espacio. Para el caso de una trayectoria en un plano, como la que estamos considerando, despejar t de una ecuación y sustituirla en la otra nos deja con una sola ecuación en x, y que describe una curva en ese plano. En nuestro caso, despejando t de la ecuación (1.8) y sustituyendo en (1.9), obtenemos:

$$y = y_0 + \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2v_{0x}^2} x^2 \quad (1.14)$$

que es una parábola, por lo que **el movimiento de un cuerpo bajo la acción de la gravedad terrestre recibe el nombre de movimiento parabólico.** Nótese que, debido al signo menos del término en x^2 , la parábola tiene los “cuernos” hacia abajo, tendiendo y a $-\infty$ cuando x tiende a $\pm\infty$ (ver la figura 1.14). Podemos reescribir la ecuación (1.14) en términos del ángulo de lanzamiento con ayuda de las expresiones (1.12-13):

$$y = y_0 + x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 (\cos \alpha)^2} x^2 \quad (1.15)$$

La derivada en el origen es:

$$\left[\frac{dy}{dx} \right]_{x=0} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} = \operatorname{tg} \alpha$$

y, por lo tanto, puesto que v_{0x} es positiva por construcción del eje X, la derivada en el origen de la trayectoria tiene el signo de la componente y de la velocidad inicial. En la figura 1.14 puede verse cómo es la trayectoria para los tres casos de v_{0y} positiva, cero y negativa.

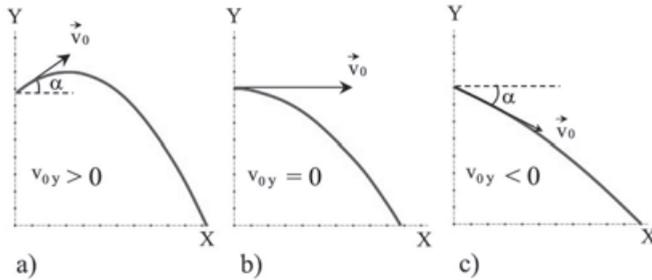


Fig. 1.14. Movimiento parabólico en la gravedad terrestre:
 a) Con velocidad inicial de componente vertical positiva.
 b) Con velocidad inicial de componente vertical cero.
 c) Con velocidad inicial de componente vertical negativa.

Cuando la altura inicial es cero, $y_0 = 0$, la componente y de la velocidad inicial es necesariamente positiva y estamos en el caso particular del movimiento de un proyectil que es disparado desde la altura del suelo y va a impactar sobre esa misma altura (ver la figura 1.15). En ese caso, la ecuación de la trayectoria es:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{g}{2v_{0x}^2} x^2 \quad (1.16)$$

que pasa por el origen ($x = 0$, $y = 0$). A partir de esta expresión es muy fácil calcular el alcance máximo, que corresponderá al valor de x para el que la trayectoria vuelva a pasar por $y = 0$. Es decir, poniendo $y = 0$ en la ecuación (1.16) y despejando x , obtenemos:

$$x_M = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} \quad (1.17)$$

Para una velocidad inicial de módulo v_0 , **el alcance máximo se logra con un ángulo de tiro tal que $\operatorname{sen} 2\alpha$ adquiera su valor máximo, igual a 1, es decir, $2\alpha = \frac{\pi}{2}$, o lo que es lo mismo, $\alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$.** Para ángulos superiores,

el tiro es bombeado, mientras que para ángulos inferiores el tiro es rasante. La altura máxima alcanzada se obtendrá calculando el máximo de y en la ecuación (1.16):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} - \frac{g}{v_{0x}^2} x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} = \frac{1}{2} x_M$$

$$y_M = y\left(\frac{1}{2} x_M\right) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} - \frac{g}{2v_{0x}^2} \left(\frac{v_{0x} v_{0y}}{g}\right)^2 = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 (\text{sen}\alpha)^2}{2g} \quad (1.18)$$

Obsérvese que la trayectoria pasa por su altura máxima justo a la mitad de su recorrido debido a la simetría de la parábola. Por ejemplo, una pelota de golf lanzada con un ángulo de 60° respecto de la horizontal, que impacta en el suelo a 90 metros del punto de salida, ha tenido que ser impulsada con una velocidad inicial $v_0 = 32 \text{ m/s} = 115 \text{ km/h}$. La pelota, con esa misma velocidad, llegará a la misma distancia si sale con un ángulo de 30° , mientras que si se lanzara con un ángulo de 45° podría haber llegado a los 104 metros.

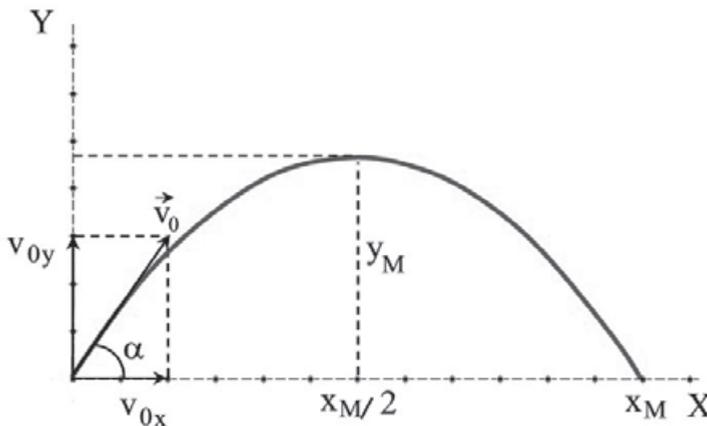


Fig. 1.15 Movimiento parabólico. Caso en el que la posición inicial es el origen de coordenadas.

La ecuación de la trayectoria puede ahora escribirse en términos de x_M e y_M sustituyendo en la ecuación (1.16) los valores de v_{0x} y v_{0y} por x_M e y_M , de la siguiente forma:

$$y = 4 \frac{y_M}{x_M} x \left(1 - \frac{x}{x_M}\right) \quad (1.19)$$

Ejemplo. Consideremos un lanzador de peso que lanza su artilugio desde una altura y_0 , con una velocidad v_0 y un ángulo α . A partir de la ecuación (1.15), el punto de impacto estará a una distancia x_M tal que:

$$0 = y_0 + x_M \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x_M^2}{2 v_0^2 (\cos \alpha)^2} \quad (1.20)$$

Para el caso de un lanzador que llegue a los 21 metros desde la vertical del punto de salida del peso (la distancia medida será, en realidad, de 21 m más los 10 a 30 cm que hay desde el borde del círculo de lanzamiento hasta dicho punto), saliendo éste de la mano a una altura de 2,20 m y con un ángulo de 35° , puede calcularse de la ecuación (1.20) la velocidad v_0 que debe imprimir a la bola.

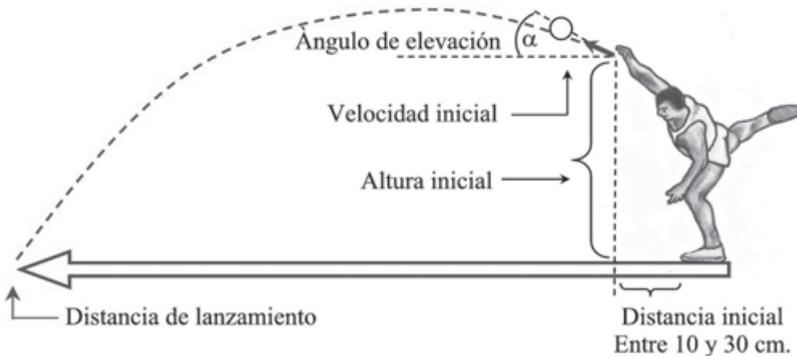


Fig. 1.16. Lanzador de peso. Parámetros básicos del lanzamiento.

El resultado es

$$v_0 = 13,8 \text{ m/s} = 49,8 \text{ km/h}$$

En realidad ese ángulo no es el óptimo. El cálculo del ángulo que maximiza el alcance horizontal puede consultarse en uno de los problemas de este capítulo.

Las componentes de la aceleración

En el caso de un movimiento en general, siempre se puede descomponer la aceleración en dos componentes, llamadas tangencial y normal, que juegan papeles distintos en la forma del movimiento. Definiremos, en cada punto de la trayectoria, un vector unitario tangente a la misma \vec{u}_T . Introduciremos también el vector unitario normal \vec{u}_N , perpendicular a \vec{u}_T en el sentido de la curvatura de la trayectoria. Como ya se dijo en la sección 1.2, la velocidad es tangente a la trayectoria y, por lo tanto, proporcional al vector unitario tangente en cualquier punto. Llamando v al módulo de la velocidad:

$$\vec{v} = v\vec{u}_T$$

La aceleración está asociada a la variación de la velocidad en función del tiempo, pudiendo ser ésta tanto de su módulo como de su dirección. Es decir, en general v y u_T variarán en el tiempo y por lo tanto:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{u}_T)}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + v\frac{d\vec{u}_T}{dt} \quad (1.21)$$

Puede demostrarse que el segundo término es perpendicular a \vec{u}_T , siendo su módulo igual a $\frac{v^2}{R}$, donde R es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto considerado. La forma más general de la aceleración es, por tanto:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

El primer término recibe el nombre de **aceleración tangencial** y va dirigido en la misma dirección de la velocidad, siendo su módulo igual a la derivada del módulo de la velocidad respecto del tiempo. Es decir, **el “papel” de esta componente es cambiar el módulo de la velocidad y hacer que el móvil se desplace más o menos rápidamente**. El segundo término recibe el nombre de **aceleración normal o centrípeta** y va dirigido a lo largo de la normal a la trayectoria apuntando siempre al centro de curvatura, de ahí su nombre. **Su “papel” no es modificar el módulo de la velocidad o, lo que es lo mismo, la rapidez del movimiento, sino que es el de curvar la trayectoria**. Por supuesto, cuanto mayor es el módulo de la velocidad, más difícil es desviar la trayectoria, y por eso la aceleración es proporcional al cuadrado de la velocidad, y también cuesta más generar una curvatura grande que una pequeña y, como el radio de curvatura es más pequeño cuanto más grande es la curvatura, es natural que la aceleración centrípeta sea inversamente proporcional a R . Como ambas componentes de la aceleración son perpendiculares entre sí, se sigue que:

$$a^2 = |\vec{a}|^2 = \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{R^2}$$

Los movimientos pueden ahora clasificarse según sean las dos componentes de la aceleración:

- $a_T = a_N = 0$: movimiento uniforme y rectilíneo

- $a_T = 0, a_N \neq 0$: movimiento uniforme (con una velocidad cuyo módulo es constante) pero no rectilíneo

- $a_T \neq 0; a_N = 0$: movimiento rectilíneo (aunque no uniforme; si a_T es constante, entonces el movimiento es rectilíneo y uniformemente acelerado)

$R = \text{constante}$: movimiento circular

$R = \text{constante}; a_T = 0$: movimiento circular uniforme

1.3.4 Movimiento circular uniforme

Consideremos el movimiento a lo largo de una circunferencia de radio de curvatura R constante con una velocidad cuyo módulo es constante y, por lo tanto, la aceleración tangencial es nula.

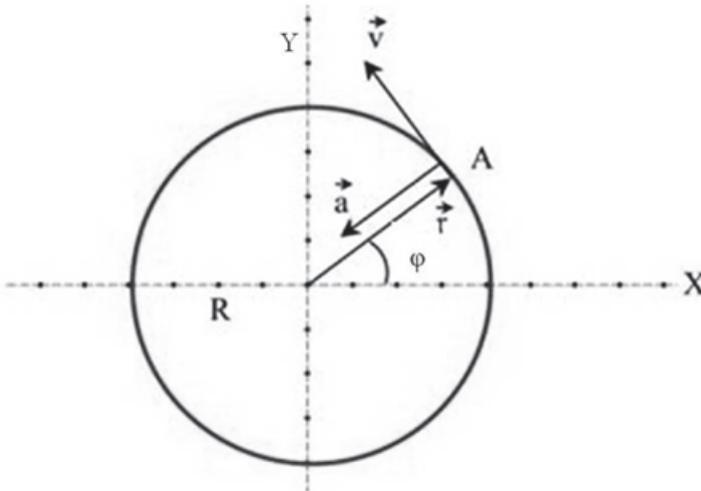


Fig. 1.17. Movimiento circular.

La aceleración centrípeta va siempre dirigida hacia el centro de la circunferencia y su módulo tiene un valor constante igual a $\frac{v^2}{R}$. Si no existiera una tal aceleración, el móvil tendría tendencia a seguir en línea recta, y no seguiría la trayectoria circular. **Definimos la velocidad angular, ω , como la variación con el tiempo del ángulo que forma el vector posición con un eje fijo que se toma, convencionalmente, como el eje X.** Es decir:

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}$$

La velocidad angular se expresa en radianes por segundo y sus dimensiones son T^{-1} . Teniendo en cuenta la relación entre el elemento de arco y el de ángulo, $ds = R d\varphi$, se sigue que:

$$v = \frac{|\vec{dr}|}{dt} = \frac{ds}{dt} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega \quad (1.22)$$

Para el caso del movimiento circular uniforme, la velocidad angular es constante, ya que tanto la velocidad lineal como el radio de curvatura lo son. La aceleración normal puede también expresarse en términos de ω del siguiente modo:

$$\vec{a}_N = \frac{v^2}{R} \vec{u}_N = \omega^2 R \vec{u}_N \quad (1.23)$$

Teniendo en cuenta que ω es constante, puede calcularse el valor del ángulo y del arco en función del tiempo:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t$$

$$s(t) = s_0 + vt$$

Nótese que cuando el ángulo varía en 2π radianes, el cuerpo vuelve a ocupar exactamente la misma posición que tenía inicialmente, ya que se ha completado una vuelta. **Llamamos periodo, T , al intervalo de tiempo que transcurre entre dos posiciones idénticas**, es decir:

$$\varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi \Rightarrow \varphi(t+T) - \varphi(t) = \omega T = 2\pi; T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Si el periodo es el tiempo que tarda el móvil en dar una vuelta completa, el número de vueltas que da por unidad de tiempo (por segundo) será su inverso y se llama frecuencia, f :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (1.24)$$

sus dimensiones son el inverso del tiempo y su unidad el inverso del segundo (s^{-1}) o hercio (Hz), siendo $1 Hz = 1 s^{-1}$. Se suele expresar en vueltas por segundo o revoluciones por segundo.

El movimiento circular puede no ser uniforme, sino estar animado de una aceleración tangencial debido a la cual varíe continuamente el módulo de

la velocidad. En este caso, la velocidad angular no será constante, sino que variará, pudiéndose definir una aceleración angular:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = \alpha R$$

y para el caso en que la aceleración angular (y la tangencial) sean constantes, el movimiento será circular y uniformemente acelerado. Si se parte del reposo en el instante inicial, la aceleración total será:

$$\vec{a} = \alpha R \vec{u}_T + (\alpha t)^2 R \vec{u}_N$$

Ejemplo. La Tierra gira alrededor del Sol completando una vuelta en un año. La trayectoria es aproximadamente una circunferencia de 150 millones de kilómetros de radio. En este caso la aceleración centrípeta es la atracción gravitatoria del Sol. La velocidad con que se mueve la Tierra será:

$$v = \frac{2\pi \times 150 \times 10^9}{365 \times 24 \times 3600} = 30.000 \text{ m/s} \approx 108.000 \text{ km/h}$$

y la aceleración tendrá el siguiente valor:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{(3 \times 10^4)^2}{150 \times 10^9} = 0,006 \text{ m/s}^2$$

Ejemplo. Una de las objeciones que se hicieron en su tiempo a la afirmación de que la Tierra estaba animada de un movimiento de rotación sobre sí misma, responsable de la sucesión de los días y las noches, era que las personas no podrían permanecer apoyadas sobre su superficie y serían despedidas al espacio debido a su propia inercia. Ello sería así si la Tierra no ejerciera una fuerza de atracción sobre cualquier cuerpo situado en su superficie que contrarresta dicha inercia. Para que un cuerpo sobre la superficie terrestre siga el movimiento de rotación de la Tierra es necesario que actúe sobre él una aceleración centrípeta cuyo módulo es:

$$a_N = \frac{v^2}{R_T}$$

donde v es la velocidad de un punto de la superficie terrestre y R_T , el radio de la Tierra. La máxima velocidad se obtendrá sobre el ecuador, uno de cuyos puntos recorre 40.000 km, que es la longitud de la circunferencia de la Tierra, en 24 horas, que es el tiempo que tarda en dar una vuelta completa. La velocidad será, por lo tanto,

$$v = \frac{40.000 \text{ km}}{24 \text{ h}} = 1.667 \text{ km/h} = 463 \text{ m/s}$$

Como el radio de la Tierra es de 6.370 km, la aceleración normal será:

$$a_N = 0,034 \text{ m/s}^2$$

Ahora bien, como la aceleración de la gravedad es de $9,8 \text{ m/s}^2$, muy superior a la mínima exigida, todos los cuerpos sobre la superficie terrestre se mantienen en ella y tienden a caer hacia el centro de la Tierra en lugar de salir despedidos al espacio.

La centrífuga de entrenamiento y los efectos fisiológicos de la aceleración

Los organismos vivos se han adaptado a las aceleraciones que pueden experimentar durante su vida sobre la Tierra, normalmente del orden de g , que es la aceleración en caída libre, mientras que aceleraciones superiores pueden producir daños sobre órganos y tejidos. En los viajes espaciales se sufren fuertes aceleraciones lineales durante el ascenso sobre un cohete para alcanzar la velocidad de escape de la Tierra (unos 40,000 km/h) desde el reposo, y también en el momento del reingreso en la atmósfera, cuando se produce un fuerte frenado por rozamiento. En el primer caso se trata de aceleraciones sostenidas durante varios minutos en las que el astronauta está situado transversalmente a la dirección de ascenso, produciéndose lo que se conoce como el efecto de “ojos hacia dentro”, mientras que en el caso del reingreso en la atmósfera se trata de picos de fuerte deceleración pero muy cortos, con un efecto llamado de “ojos hacia afuera”. Otros efectos importantes, a los que nos referiremos más adelante, ocurren en situaciones de ingravidez, que se dan cuando se describe una órbita estable alrededor de la Tierra.

La forma más eficaz y utilizada de experimentar con aceleraciones elevadas es con ayuda de un brazo giratorio en cuyo extremo se sitúa el cuerpo sobre el que se quiere experimentar, tal y como se muestra en la figura 1.18. El soporte sobre el que se apoya dicho cuerpo para no salir despedido por su propia inercia es el que imprime a éste la aceleración centrípeta necesaria para mantenerlo girando. Los primeros astronautas norteamericanos se entrenaron

en una centrífuga cuyo brazo tenía una longitud de 15 metros y podía llegar a generar una aceleración de hasta 40 g, es decir, 392 m/s^2 . Un artefacto de este tipo permite estudiar pautas de aceleración y deceleración durante intervalos breves o prolongados de tiempo, y probar con diferentes posiciones del sujeto sobre el que se experimenta.

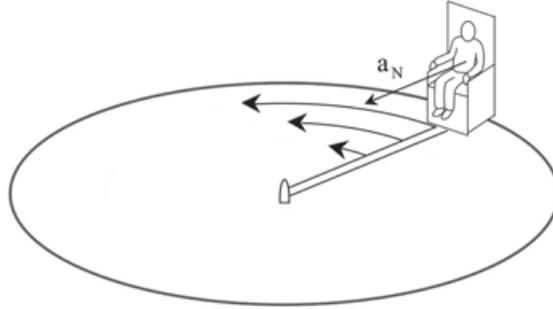


Fig. 1.18. Esquema de una centrífuga de entrenamiento. El asiento ejerce una fuerza sobre la persona imprimiéndole una aceleración centrípeta, que es la que la obliga a seguir la trayectoria circular.

De acuerdo con las ecuaciones del movimiento circular uniforme, para una aceleración normal dada $a_N = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$, el periodo de rotación $T = \frac{2\pi}{\omega}$ y la velocidad lineal vienen dadas, en función de R , por las siguientes ecuaciones:

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R}{a_N}}$$

$$v = \sqrt{a_N R}$$

Poniendo ahora $R = 15 \text{ m}$ y distintos valores de a_N , se obtienen los valores de T y v necesarios para que el cuerpo experimente la aceleración a_N . Por ejemplo, si queremos que dicha aceleración sea igual a g , entonces $T = 7,8 \text{ s}$ y $v = 44 \text{ km/h}$, mientras que si queremos llegar a 10 g, el brazo de la centrífuga debe completar una rotación completa en 2,5 s con una velocidad tangencial de 138 km/h, y para 40 g dichos valores deberán ser de 1,2 s y 276 km/h.

En los experimentos con la centrífuga se comprobó que **la posición en la que se producen menos efectos fisiológicos es aquella en la que la aceleración es transversal al cuerpo**, mientras que la aceleración en el sentido de la cabeza a los pies o viceversa es causa de trastornos graves,

especialmente en el flujo sanguíneo de la cabeza y las extremidades. Una aceleración transversal de unos 3 g es perfectamente tolerable durante varios minutos incluso por personas no especialmente preparadas. Así, durante la fase de ascensión de los vuelos espaciales se soportan aceleraciones de unos 4 g que no causan daños apreciables en posición transversal, mientras que sería imposible soportarlas en posición erguida; por eso los astronautas se tienden en asientos colocados de forma perpendicular a la línea de despegue. Aceleraciones entre 8 g y 10 g podrían tolerarse, en individuos entrenados, durante unos dos minutos sin consecuencias irreversibles. No obstante lo cual, podrían producirse dolores de pecho, dificultad para respirar y desmayos ocasionales. **Más allá de unos 10 g los efectos sobre la salud pueden ser irreversibles excepto si se trata de picos de aceleración muy cortos.** Así, uno de los médicos que experimentaba en la centrífuga fue capaz de soportar una aceleración transversal de 31 g durante 5 segundos. Aceleraciones de este orden durante más tiempo producen daños en los órganos internos, disfunciones cardíacas y pueden llegar a ser letales para los humanos.

1.3.5 La percepción de la aceleración en el organismo

Nuestro cerebro es capaz de integrar numerosas informaciones provenientes de los sentidos acerca de la posición del centro de gravedad del cuerpo, de la posición relativa de sus partes, de su orientación respecto del campo gravitatorio terrestre, de la intensidad de éste, o de la aceleración con que nos movemos. Las señales proporcionadas por ojos y oídos complementan las que provienen de músculos, articulaciones, el tacto y los receptores de presión de la piel, sobre todo los situados en la planta de los pies. Pero los órganos especialmente adaptados para detectar la aceleración con que se mueve el cuerpo, muy similares en todos los vertebrados, se encuentran, en los mamíferos, en el oído interno: los canales semicirculares y el vestíbulo.

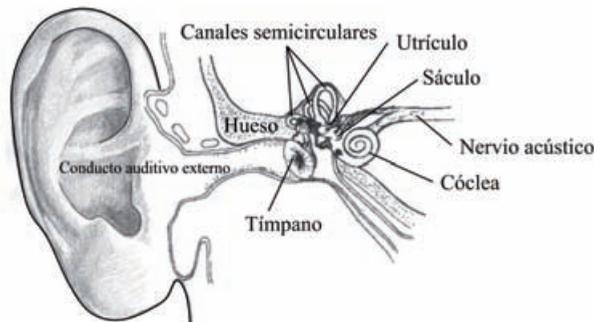


Fig. 1.19. Situación de los canales semicirculares, el utrículo y el sáculo en el oído interno.

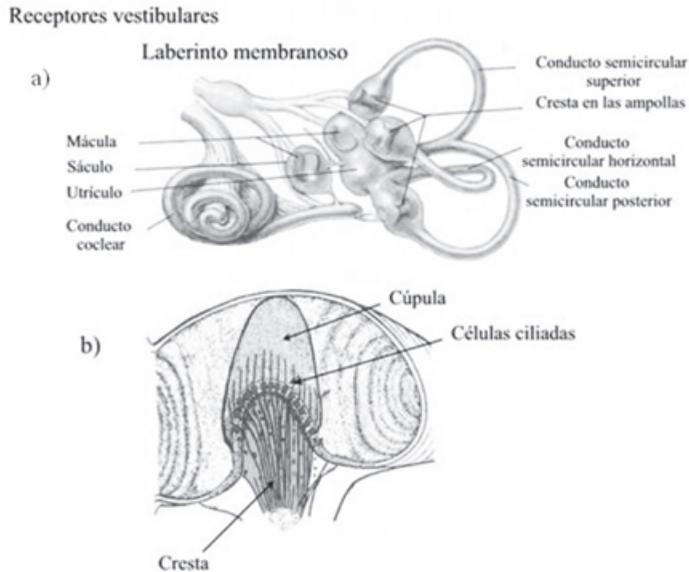


Fig. 1.20. a) Los canales semicirculares, el sáculo y el utrículo.

b) Ampolla en el extremo de un canal semicircular con la cresta ampular, la cúpula y las células ciliadas situadas en la cresta.

Los canales semicirculares son tres conductos aproximadamente semicirculares, de un milímetro de diámetro interno para los humanos, contenidos en planos perpendiculares entre sí, dos de ellos verticales, llamados anterior y posterior, y un tercero horizontal, llenos de un fluido, llamado endolinfa. Cada canal tiene en uno de sus extremos una zona dilatada llamada ampolla en cuyo epitelio interno hay una protuberancia en forma de pliegue perpendicular al conducto semicircular correspondiente llamada cresta ampular. Sobre cada cresta hay una masa gelatinosa en forma de campana, llamada cúpula, en la que penetran los cilios de las células sensoriales situadas en la base de la cresta. Las células sensoriales están, a su vez, conectadas a fibras nerviosas que se unen a las que proceden de los otros receptores del vestíbulo para formar parte del nervio acústico. Este órgano es sensible a las aceleraciones angulares que se producen cuando el cuerpo (específicamente la cabeza) gira.

En el caso de aceleraciones angulares, **los canales se mueven con la cabeza, mientras que el fluido contenido en ellos tiende a quedar retrasado por su propia inercia**, lo que genera un movimiento relativo entre éste y los canales que inclina la cúpula en la que se encuentran los cilios de las células sensoriales y éstos se curvan generando **una señal eléctrica** que se transmite al cerebro a través del nervio acústico.

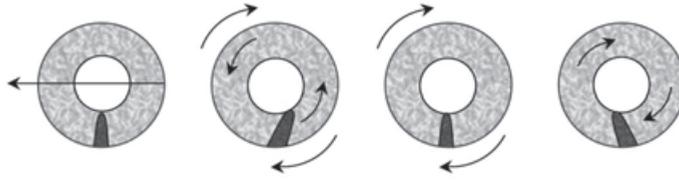


Fig. 1.21. Cuando la cabeza se mueve con aceleración lineal pero no circular, la endolinfa y la cúpula con las células ciliadas se mueven acompasadamente, no hay flexión en los cilios y no se genera señal nerviosa.

Cuando el canal gira con una cierta velocidad angular en el sentido de las agujas de un reloj, la endolinfa se mueve en sentido contrario respecto de la cúpula fijada a la pared del canal y se produce una flexión en los cilios que genera una señal nerviosa.

Cuando el canal gira con velocidad angular constante, la endolinfa se mueve al mismo tiempo que las paredes del canal y no hay flexión de la cúpula.

Cuando el giro de la cabeza se detiene, hay una velocidad angular en sentido contrario a las agujas de un reloj y la endolinfa se mueve en sentido contrario, flexionando la cúpula y generando una señal.

Cada célula tiene una prolongación larga y estrecha del citoplasma que forma el cilio más largo, llamado cinetocilio (o cinocilio o kinocilio), situado en posición lateral, y un conjunto de cilios más cortos, también proyecciones del citoplasma, llamados estereocilios. De esta forma, la señal transmitida cuando se produce una aceleración angular que hace que los estereocilios se curven hacia el cinetocilio es de un tipo (aumento del ritmo de pulsos eléctricos), mientras que cuando se curvan alejándose es del tipo contrario (disminución del ritmo de los pulsos).

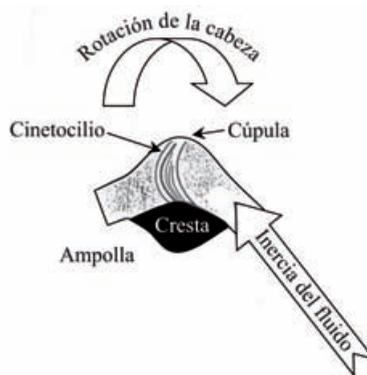


Fig. 1.22. Generación de una señal eléctrica en las células ciliadas de la cresta ampular cuando la inercia de la endolinfa flexiona la cúpula en la que están embebidos los cilios.

Teniendo en cuenta que hay un grupo de canales semicirculares en cada lado de la cabeza y que, en cada uno, el efecto sobre los cilios en contacto con el fluido depende de la dirección e intensidad del movimiento, es posible interpretar éste con gran precisión.

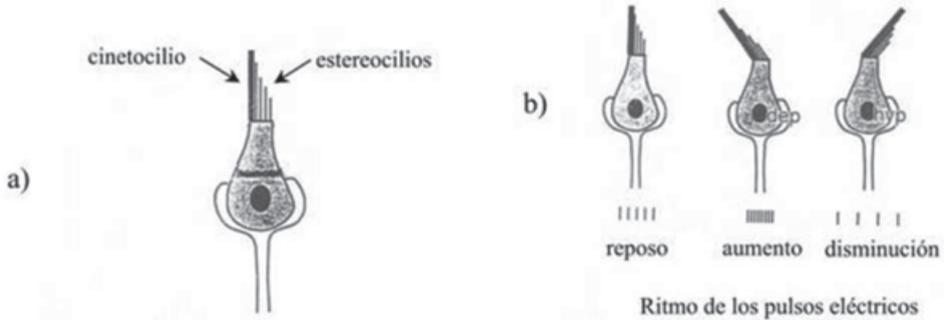


Fig. 1.23. a) Célula ciliada con el cinetocilio y los estereocilios.
 b) Señales eléctricas generadas al flexionar los cilios.

El vestíbulo lo constituyen dos bolsas membranosas comunicadas entre sí llamadas utrículo, de donde parten los canales semicirculares, y sáculo, que se comunica, a su vez, con la cóclea. Las dos bolsas están llenas de endolinfa y presentan en su epitelio interior unas zonas diferenciadas en forma de pliegue hacia el interior, llamadas máculas acústicas, que contienen células sensoriales ciliadas.

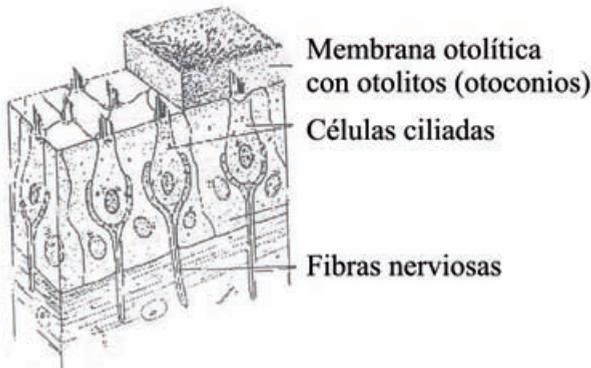


Fig. 1.24. Mácula del utrículo o del sáculo con las células ciliadas y la membrana gelatinosa con otolitos.

Como en el caso de los canales semicirculares, cada célula tiene un cinetocilio y múltiples estereocilios que penetran en una membrana gelatinosa, situada encima de las máculas, que contiene un gran número de pequeños cristales de carbonato cálcico llamados otolitos. **Cuando la cabeza se mueve**

con una aceleración lineal, los otolitos, más densos que el fluido en el que están sumergidos, tienden a quedarse retrasados y deforman la membrana que contiene a los cilios de las células sensoriales, generando señales con la misma estructura que en el caso de los canales semicirculares.

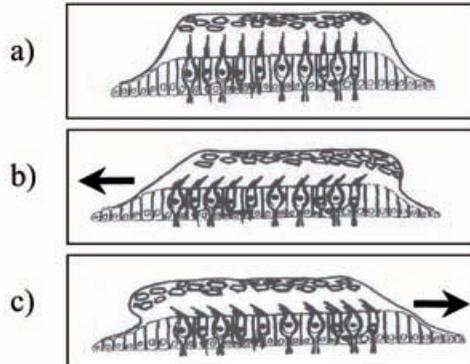


Fig. 1.25. a) Mácula en reposo o con velocidad uniforme.

b) Mácula moviéndose con aceleración lineal hacia la izquierda. Los otolitos deforman la membrana gelatinosa y ésta flexiona los cilios de las células ciliadas.

c) Mácula moviéndose con aceleración lineal hacia la derecha.

La mácula del utrículo es sensible, en particular, a las aceleraciones en direcciones paralelas a la superficie terrestre, mientras que la mácula del sáculo es sensible a las aceleraciones en dirección perpendicular a dicha superficie. Cuando cambia la orientación de la cabeza respecto del campo gravitatorio terrestre, los otolitos se mueven buscando la posición de equilibrio y deforman de nuevo los cilios. Así, **los órganos vestibulares no son sólo sensibles a las aceleraciones lineales, sino también a la orientación respecto de la gravedad y a la intensidad de ésta.**

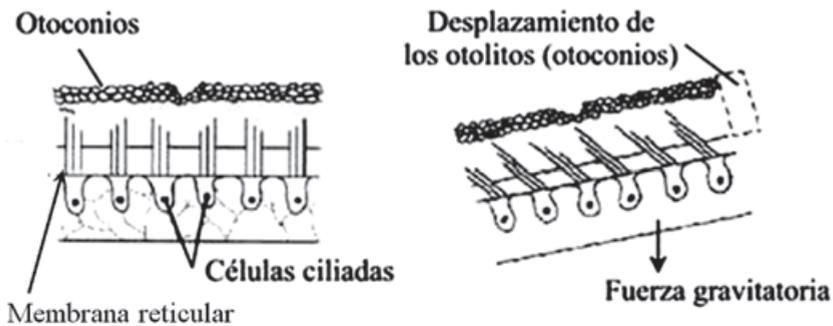


Fig. 1.26. Las máculas son sensibles también a la dirección de la gravedad en relación con la orientación de la cabeza. Cuando se produce una inclinación hay un deslizamiento de los otolitos que depende del ángulo de inclinación y de la intensidad de la fuerza gravitatoria.

Una de las causas de la sensación de náusea y de mareo es la incongruencia entre los mensajes que envía el oído interno desde las células ciliadas de los canales semicirculares y los otolitos y las que provienen de los ojos o los sensores corporales, que es lo que sucede con los movimientos bruscos en los medios de transporte. Esa misma sensación de desconcierto y mareo ocurre cuando estando dentro de un automóvil en reposo, otro situado al lado se desplaza suavemente. La sensación visual es que somos nosotros quienes nos estamos moviendo, pero los órganos de la aceleración no registran señal alguna, por lo que se produce una incongruencia entre ambos órganos.

Todos los vertebrados tienen una estructura del oído interno similar, aunque la forma de los canales semicirculares varíe de unos a otros, triangular en los reptiles, elíptica en las aves y casi circular en los mamíferos. También varían el tamaño y la composición de los otolitos y la forma en que interaccionan con los cilios. Cuando son muy finos y parecen partículas de arena, como en el caso de los humanos, se llaman otoconios.

Los invertebrados, excepto los insectos, tienen también órganos para detectar su posición respecto de la gravedad y las aceleraciones que experimentan. Se llaman, en general, estatocistos y los hay en diversas variantes, pero responden al mismo principio que los órganos vestibulares. Es decir, constan de una cavidad tapizada en su interior con células ciliadas y llena de endolinfa en la que hay sumergidos corpúsculos de un material sólido y más denso llamados estatolitos. El movimiento relativo de estos corpúsculos respecto del fluido y su posición en la cavidad provocan flexiones en los estereocilios y, en consecuencia, señales eléctricas que son interpretadas después por el sistema nervioso. En las medusas, que existen desde hace más de 600 millones de años, ya hay estatocistos primitivos, llenos de agua, alineados en el borde de la umbrela. En los moluscos empiezan a aparecer órganos precursores de las crestas ampulares y en los peces más primitivos, los ciclóstomos, la cavidad se aísla del exterior y el fluido interno, la endolinfa, es segregado por el animal. Los cangrejos y las langostas utilizan partículas de arena como estatolitos y los cambian cada vez que mudan de caparazón. Así, se pudo hacer el siguiente experimento: una langosta hizo su muda en un ambiente en el que la arena había sido sustituida por partículas de hierro que incorporó a sus estatocistos. Cuando, mediante un imán, se desplazaban estas limaduras, el animal adoptaba posturas diferentes, como si la orientación del suelo (y la fuerza gravitatoria) hubiera cambiado e intentara colocarse en su posición “normal” respecto al falso campo gravitatorio creado por el imán.

1.4 Ejercicios propuestos

Ejercicio 1.1 En 12 gramos de carbono existen $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ átomos (N_A es el número de Avogadro). Si contáramos un átomo por segundo, ¿cuánto tiempo, en años, tardaríamos en contar todos los átomos de un gramo de carbono? Sabiendo que el tiempo transcurrido desde el Big Bang hasta ahora es de $1,4 \times 10^{10}$ años, ¿cuánto supone este intervalo de tiempo en vidas del Universo?

Sol.: $\Delta t = 1,59 \times 10^{15}$ años \approx 110.000 vidas del Universo

Ejercicio 1.2 El corazón humano bombea a razón de 0,083 litros de sangre por segundo. Sabiendo que una persona de dimensiones medias tiene unos 5 litros de sangre, ¿cuánto tiempo tarda el corazón en bombear toda la sangre de un organismo humano?

Sol.: 1 minuto

Ejercicio 1.3 Comprobar la consistencia dimensional de las siguientes ecuaciones [v, a, x, t representan velocidad, aceleración, longitud y tiempo, respectivamente]:

$$1. v^2 + v^3 = 2ax$$

$$2. x = v^2 / a$$

$$3. v = at^2 \text{ sen } [(x/t^2)/a]$$

$$4. v = 3at + x/t$$

Sol.: 1) no; 2) sí; 3) no; 4) sí

Ejercicio 1.4 Sean $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ los vectores unitarios de los ejes rectangulares XYZ, con origen en O. Considérense los vectores siguientes:

$$\vec{r}_1 = \vec{i} - 3\vec{j}; \quad \vec{r}_2 = 2\vec{j} - 2\vec{k}; \quad \vec{r}_3 = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

1. Calcular sus módulos

2. Calcular las componentes y los módulos de los vectores

$$\vec{A} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3; \quad \vec{B} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 - \vec{r}_3$$

3. Determinar el vector unitario \vec{u}_C coincidente con el vector $\vec{C} = \vec{r}_1 + 2\vec{r}_2$

4. Calcular los productos $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2$ y $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$

Sol.: 1) $\sqrt{10}, \sqrt{8}, \sqrt{6}$; 2) $\vec{A} = (2, 1, -3)$, $A = \sqrt{14}$; $\vec{B} = (0, -3, -1)$, $B = \sqrt{10}$;

3) $\vec{u}_c = \frac{1}{\sqrt{18}}(1, 1, -4)$; 4) $\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = -6$; $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = 6\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$

Ejercicio 1.5 Descomponer un vector \vec{v} dirigido según la dirección $\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ y módulo $\sqrt{27}$ según las direcciones de los vectores $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j}$; $\vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$; $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{k}$

Sol.: $\vec{v} = -3\vec{a} + 3\vec{c}$

Ejercicio 1.6 Un tren metropolitano parte de una estación con aceleración constante y al cabo de 10 s alcanza una velocidad de 72 km/h. Mantiene esta velocidad durante 2 minutos. Al llegar a la estación siguiente frena uniformemente recorriendo 200 m hasta parar. Si el movimiento que ha realizado es rectilíneo, calcular:

1. La aceleración en la primera fase del movimiento
2. El espacio que recorre mientras acelera
3. La aceleración que tiene en la última fase
4. El tiempo que ha estado en movimiento
5. El espacio total recorrido
6. Representar la velocidad y la aceleración en función del tiempo durante todo el movimiento

Sol.: 1) 2 m/s^2 ; 2) 100 m ; 3) -1 m/s^2 ; 4) 150 s ; 5) $2,7 \text{ km}$

Ejercicio 1.7 Un gato quiere saltar sobre una presa situada a 1 m de distancia en horizontal y a 30 cm de altura. Calcular la velocidad mínima de despegue que tiene que imprimir a su cuerpo para alcanzarla. Si salta con una velocidad inicial de 4 m/s, ¿con qué ángulo debe despegar para caer sobre la presa?

Sol.: $v_{\min} = 3,63 \text{ m/s}$; $\alpha = 39^\circ$ o 68°

Ejercicio 1.8 Un electrón de los que inciden en la pantalla de un televisor es acelerado, dentro del tubo de rayos catódicos, a lo largo de un centímetro con una aceleración del orden de 10^{14} m/s^2 . Calcular la velocidad que adquiere

al final del tramo de aceleración. El electrón, una vez acelerado, se mueve en vacío sobre una distancia de unos 20 cm hasta llegar a la pantalla. Calcular el tiempo que tarda en realizar ese recorrido.

$$\text{Sol.: } v = 1,4 \times 10^6 \text{ m/s; } \Delta t = 0,14 \times 10^{-6} \text{ s}$$

Ejercicio 1.9 Un avión se mueve en la pista de despegue con una aceleración del orden de un cuarto de g . Calcular la longitud mínima de la pista si tiene que alcanzar una velocidad de 300 km/h para empezar a elevarse.

$$\text{Sol.: } l = 1.420 \text{ m}$$

Ejercicio 1.10 Una lanzadera en un parque de atracciones tiene una altura de 60 m. La cabina se mueve hacia abajo en caída libre durante 45 m. ¿Cuál debe ser la aceleración de frenado durante los últimos 15 m para que llegue al suelo con velocidad cero?

$$\text{Sol.: } a = 29,4 \text{ m/s}^2 \approx 3 \text{ g}$$

Ejercicio 1.11 Justificar la norma de tráfico que establece que la distancia de seguridad para frenar debe ser proporcional al cuadrado de la velocidad. Dicha distancia es igual, en metros, a la décima parte de la velocidad medida en kilómetros por hora elevada al cuadrado. Calcular la aceleración de frenado implícita en dicha regla.

$$\text{Sol.: } a = 3,86 \text{ m/s}^2$$

Ejercicio 1.12 Si una persona hace girar horizontalmente una bola que está sujeta por una cuerda de forma que el radio de giro sea de 1,5 metros y la frecuencia sea de una vuelta cada dos segundos, ¿qué aceleración centrípeta es necesario imprimir tirando de la bola para que siga esa trayectoria?

$$\text{Sol.: } a_N = 14,8 \text{ m/s}^2$$

Ejercicio 1.13 Las plantas crecen en sentido contrario a la aceleración que actúa sobre ellas. Normalmente es sólo la gravedad y, por eso, adoptan la posición vertical. Si una planta está en el borde de una plataforma circular de 2 m de radio que gira con una frecuencia de media vuelta por segundo, ¿qué ángulo formará con la vertical al crecer?

$$\text{Sol.: } \alpha = 33^\circ$$

Ejercicio 1.14 Un automóvil entra en una curva cuyo radio es de 100 m. Si se considera como criterio de seguridad que la fuerza centrípeta no supere un tercio de la aceleración de la gravedad, calcular la velocidad máxima a la que debe tomar esa curva.

$$\text{Sol.: } v = 65 \text{ km/h}$$

Ejercicio 1.15 Calcular, para un móvil que se mueve en el plano XY y cuyo vector posición (en metros) viene dado por:

$$\vec{r}(t) = t^3 \vec{i} + (t-1) \vec{j}$$

1. La ecuación de la trayectoria
2. La velocidad en $t = 1$ s
3. La aceleración total en $t = 1$ s
4. Las componentes intrínsecas de la aceleración en $t = 1$ s
5. El radio de curvatura en $t = 1$ s

Sol.: 1) $y = x^{\frac{1}{3}} - 1$; 2) $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j}$ m/s, $v = \sqrt{10}$ m/s; 3) $\vec{a} = 6\vec{i}$ m/s²;
 4) $a_T = 18/\sqrt{10}$ m/s², $a_N = 6/\sqrt{10}$ m/s²; 5) $\rho = 5\sqrt{10}/3$ m

Ejercicio 1.16 Un lanzador de martillo hace girar su artefacto seis vueltas y media antes de soltarlo. Si la longitud del alambre con la que lo sujeta es de 1,10 m y lo lanza a 75 m de distancia con un ángulo de 45°, calcular la velocidad angular en el momento de soltar la bola y la aceleración angular que ha debido imprimirle durante los giros.

Sol.: $\omega = 24,6$ rad/s; $\alpha = 7,4$ rad/s²

Ejercicio 1.17 Una partícula se mueve, en una dimensión, con una aceleración $a = 2v$. Sabiendo que en el instante inicial la velocidad es de 1 m/s y la coordenada que marca la posición es de 1 m, calcular:

1. La velocidad en función del tiempo
2. La aceleración en función del tiempo
3. La posición en función del tiempo

Sol.: 1) $v = e^{2t}$ m/s; 2) $a = 2e^{2t}$ m/s²; 3) $x = 1 + \frac{1}{2}(e^{2t} - 1) = \frac{1}{2}(e^{2t} + 1)$ m

Ejercicio 1.18 Dos corredores compiten sobre una longitud $L = 100$ m. El primero hace el recorrido con velocidad constante $v_0 = 10$ m/s y llega, por lo tanto, a la meta en un tiempo $t_0 = \frac{L}{v_0} = 10$ s. El segundo llega a la meta en el mismo instante que el primero, pero $\overset{v_0}{\text{parte}}$ del reposo y aumenta su velocidad sinusoidalmente hasta llegar al máximo en el momento de la llegada. Calcular dicha velocidad máxima del segundo corredor y representar la velocidad y la posición de ambos en función del tiempo.

[Ayuda: partir de que la velocidad del segundo corredor es $v = A \operatorname{sen} \omega t$ y demostrar que las condiciones del problema implican que $\omega = \frac{\pi}{2t_0}$ y $A = \frac{\pi L}{2t_0}$]

Sol.: $v = 15,7 \text{ m/s}$

Ejercicio 1.19 *Un águila sólo percibe un objeto si éste cubre un ángulo mayor o igual que un minuto de arco. Si un roedor mide 12 cm, calcular la altura máxima a la que el águila debe situarse para registrar la presencia del roedor. Si desde esa altura se lanza en caída libre, calcular el tiempo que tarda en llegar a tierra y, por tanto, el tiempo que tiene el roedor para protegerse.*



Fig 1.27. Relación entre el tamaño mínimo de una presa y la altura a la que vigila un águila.

Sol.: $h = 412 \text{ m}; \quad t = 9 \text{ s}$

Ejercicio 1.20 *Para el lanzador de peso de la figura 1.16, calcular el ángulo de despegue α_M que maximiza el alcance del lanzamiento, para una velocidad inicial y una altura de salida dadas. Encontrar la expresión general y el valor de α para una velocidad inicial de 13,8 m/s y una altura de salida de 2,20 m.*

[Ayuda: despejar x_M de la expresión (1.20) y maximizar su valor respecto del ángulo α , o mejor respecto de $\cos 2\alpha$, suponiendo constantes y_0 y v_0]

Sol.: $\cos 2\alpha_M = \frac{y_0 g}{y_0 g + v_0^2}; \quad \alpha_M = 42^\circ$

1.5 Referencias

- Animal Diversity Web. <http://animaldiversity.ummz.umich.edu/>
- Barnes, R. D. *Zoología de Invertebrados*. Interamericana, 1969
- Bennett-Clark, H. C. “The Energetics of the Jump of the Locust *Schistocerca Gregaria*”. *J. Exp. Biol.* **63** (1975) 53
- Bennett-Clark, H. C. & Alder, G. M. “The effect of air resistance on the jumping performance of the insects”. *J. Exp. Biol.* **82** (1979) 105
- Bennett-Clark, H. C. & Lucey, E. C. A. “The Jump of the Flea: a Study of the Energetics and a Model of the Mechanism”. *J. Exp. Biol.* **47** (1967) 59
- Brackenbury, J. *Insects in Flight*. Blandford Press, 1992
- Bureau International des Poids et Mesures. <http://www.bipm.fr>
- Burrows, W. E. *This New Ocean*, Random House, 1998
- Burrows, M. “Froghopper insects leap to new heights”. *Nature* **424** (2003) 509
- Centro Español de Metrología: <http://www.cem.es>
- Chou, J. L. *et al. Acceleration Tolerance: Effect of Exercise, Acceleration Training; Bed Rest and Weightlessness Deconditioning*, NASA, 1987
- Gil-Carracedo, L. M. *Otología*. Menarini, 1995
- Heitler, W. J. *How Grasshopper Jump* . http://www.st-andrews.ac.uk/126_wjh/jumping
- Nave, C. R. *Hyperphysics*. <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/sound/ear.html>
- Netter, F. H. *Sistema Nervioso: Anatomía y Fisiología*. Salvat, 1987
- Rodríguez de la Fuente, F. *Fauna. África*. Salvat, 1978
- Rothschild, M. *et al.* “The flying leap of the flea”. *Scientific American* **229** (1973) 92
- Rus, A. & Hernández, C. “Récords de la Fauna”. *La Tierra* **22** (2000) 46
- Snodgrass, R. E. *Principles of Insect Morphology*. <http://entmuseum9.ucr.edu/ent205/snodgrass>
- White, R. J. “Weightlessness and the Human Body”. *Scientific American*, September, 1998
- <http://www.nocturnalprimate.org>

Capítulo 2. Dinámica. La fuerza en los animales

2.1 Las leyes de Newton

Una vez establecidos los procedimientos para describir el movimiento de los cuerpos, es preciso estudiar las fuerzas o interacciones que actúan sobre ellos y su efecto sobre las trayectorias que siguen, es decir, lo que tradicionalmente se conoce como las causas del movimiento. La Dinámica es la parte de la Mecánica que se ocupa de relacionar fuerzas y trayectorias y, en el marco de la Física Clásica, esta relación puede formularse con ayuda de tres leyes o principios debidos a Isaac Newton.

2.1.1 Primera ley de Newton. La inercia

La primera ley establece el comportamiento de los cuerpos cuando no se ejerce sobre ellos fuerza alguna. Un cuerpo en tales condiciones se dice que es libre, y puede visualizarse como infinitamente alejado de todos los demás. Puesto que las únicas interacciones posibles sobre un cuerpo proceden de otros y la intensidad de dichas interacciones disminuye con la distancia, en el límite en que ésta tiende a infinito todas ellas tienden a cero. Pues bien, la primera ley suele enunciarse diciendo que **“una partícula libre se mueve con movimiento uniforme y rectilíneo respecto de un sistema de referencia inercial”**. Lo malo de este enunciado es que hay que definir qué se entiende por sistema inercial y la definición más usual es que es aquel sistema de referencia en el que toda partícula libre se mueve con movimiento uniforme y rectilíneo, es decir, una tautología o razonamiento circular. Pero la primera ley es mucho más que una tautología. En efecto, un sistema de referencia debe estar siempre ligado a algo material, a un cuerpo o conjunto de cuerpos, como pueden ser las aristas de una habitación o tres varillas perpendiculares. Llamaremos sistema inercial a un sistema de referencia ligado a un cuerpo que se

mueve libremente. En ese caso, la primera ley tiene dos consecuencias importantes:

- **Todos los sistemas de referencia inerciales posibles se mueven con movimiento uniforme y rectilíneo entre sí.**
- **Dos cuerpos libres se mueven con movimiento uniforme y rectilíneo entre sí.**

Nótese que esta segunda consecuencia podría ser una formulación de la primera ley sin necesidad de acudir a conceptos no definidos antes, y está lejos de ser trivial. De hecho, hasta Galileo y los físicos del siglo XVII, se pensó que el estado “natural” de un cuerpo sobre el que no se ejerce ninguna fuerza es el reposo y que mantener una velocidad uniforme requiere la acción de una fuerza constante. Ésta es la conclusión de la experiencia cotidiana, pero no puede servir para conocer cómo es el movimiento de los cuerpos libres porque hay siempre fuerzas que actúan sobre ellos, en particular la gravedad y el rozamiento. Hizo falta el análisis y la abstracción para extraer de esa experiencia cotidiana la conclusión de que los cuerpos no sujetos a ninguna fuerza permanecen moviéndose indefinidamente con velocidad constante. Hoy, la posibilidad de conocer el comportamiento de los cuerpos en el espacio exterior, en condiciones muy próximas a la ausencia de toda fuerza, permite entender esta primera ley sin demasiada dificultad y proporciona evidencia empírica de su corrección. Ya no nos resulta extraña, en la ficción cinematográfica, la visión de un astronauta perdido en el espacio sin que nada interactúe con él, alejándose de su nave o astro de procedencia indefinidamente, con un movimiento uniforme y rectilíneo.

Conviene observar que, puesto que la elección de sistema de referencia es arbitraria y que son válidos sistemas que se mueven uno respecto de otro, la velocidad de un cuerpo no es una característica intrínseca de su movimiento, sino que depende del punto de vista desde el que se observe. Así, un cuerpo que está en reposo respecto de un determinado observador (ligado a un sistema de referencia inercial) se moverá visto por otro observador (en reposo en otro sistema de referencia que se mueve respecto del anterior).

2.1.2 Segunda ley de Newton. La fuerza y la masa

Puesto que, en ausencia de fuerzas, el movimiento de un cuerpo es uniforme y rectilíneo, la acción de las fuerzas debe generar aceleraciones, cambiando así la trayectoria que éste tendría si fuera libre. La segunda ley establece precisamente la relación entre fuerzas y aceleraciones. En concreto, si \vec{F} es la fuerza total sobre una partícula, suma vectorial de todas las que puedan

actuar sobre ella, entonces la partícula adquiere una aceleración \vec{a} cuya relación con la fuerza es la siguiente:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (2.1)$$

donde m es un parámetro llamado masa, o también masa inercial. La masa así introducida es una propiedad básica de cada cuerpo, con dimensiones propias, independientes de longitud y tiempo, cuya unidad es, en el Sistema Internacional, el kilogramo.

Observación. El kilogramo. *A finales del siglo XVIII, se decidió considerar como unidad de masa la contenida en un litro (es decir, un decímetro cúbico) de agua y llamarla “grave”. Inmediatamente después de la Revolución francesa se acordó que ésta era demasiado grande para muchas transacciones de la vida cotidiana y que, por lo tanto, la unidad de masa sería la milésima parte de la contenida en un litro de agua, es decir, la contenida en un centímetro cúbico de agua, y la llamaron “gramo”. Pero un objeto que sirviera para contrastar la masa de un gramo era difícil de usar y de construir con precisión, así que el patrón físico con el que comparar las pesas utilizadas para medir la masa fue de mil gramos, es decir, un kilogramo, aunque la unidad fuera el gramo. Posteriormente, cuando en 1875 se redefinió la unidad de masa, dentro de lo que sería el Sistema Internacional, se volvió a la masa de un litro de agua y se le siguió llamando kilogramo. Ésta es la razón de que la unidad de masa tenga el nombre de un múltiplo de una cantidad que no es unidad en el SI. A partir de 1901, se define el kilogramo como la masa de un cierto prototipo hecho de platino e iridio, conservado en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas, y corresponde aproximadamente a la de un litro de agua a cero grados centígrados.*

Observación. Masa y peso. *Lo que se mide en las balanzas con ayuda de pesas que se comparan con los patrones de masa no es exactamente la masa, sino el peso de un cuerpo. Como veremos, el peso de un cuerpo es proporcional a su masa pero inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la Tierra. Así que comparar los pesos de dos cuerpos situados en los platillos de una balanza equivale a comparar las masas siempre que la distancia al centro de la Tierra sea igual para los dos. Y es evidente que, en todos los casos prácticos, eso es lo que sucede exactamente o con un grado de aproximación enorme.*

De la ecuación (2.1) se sigue que la fuerza es una magnitud cuyas dimensiones pueden escribirse en términos de masa, longitud y tiempo:

$$[F] = MLT^{-2}$$

La unidad de fuerza, en el Sistema Internacional, es el Newton (N), de donde:

$$1 N = 1 kg \times m/s^2$$

Las fuerzas sobre un cuerpo son el resultado de las interacciones con todos los cuerpos de su entorno, de contacto, como el rozamiento, o a distancia, como la gravitación. El contenido fundamental de la segunda ley es que los efectos de las fuerzas que actúan sobre los cuerpos se manifiestan a través de las aceleraciones que inducen en sus movimientos. La aceleración, por lo tanto, al contrario que la velocidad, sí que es una propiedad intrínseca de los movimientos, dependiente de la dinámica y no del sistema de referencia escogido.

Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo dependen de la posición y velocidad del mismo (relativas a todos los otros cuerpos) y del tiempo, aunque en la mayoría de los casos dependen únicamente de la posición. Las únicas fuerzas que existen se derivan de interacciones entre dos cuerpos. Así, para un conjunto de N objetos, la fuerza sobre cada uno de ellos es igual a la suma de las que se derivan de la interacción con cada uno de los restantes. Si llamamos \vec{F}_i a la fuerza total sobre el cuerpo i y \vec{F}_{ji} a la fuerza que ejerce sobre él el cuerpo j , tendremos:

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ji} \quad (2.2)$$

en el bien entendido que $\vec{F}_{ii} = 0$.

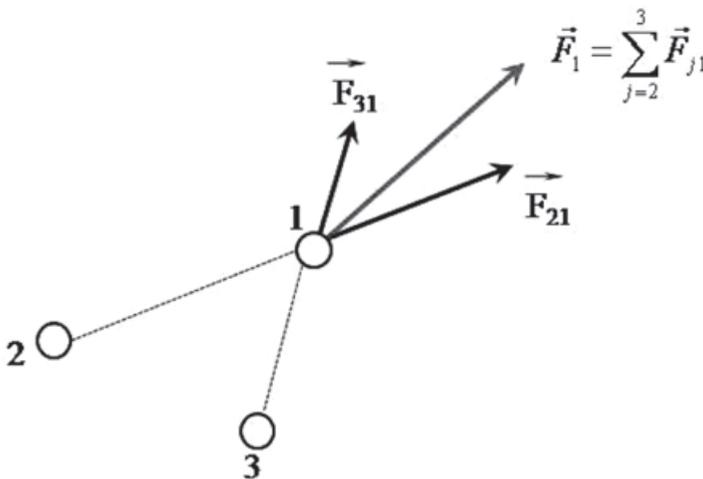


Fig. 2.1. Fuerza total sobre la partícula 1 debida a las interacciones con las partículas 2 y 3.

2.1.3 Tercera ley. La acción y la reacción

Puede enunciarse diciendo que **la fuerza ejercida por un cuerpo sobre otro es siempre igual y de sentido contrario a la ejercida por el segundo sobre el primero**. Es decir, usando la nomenclatura introducida en el párrafo anterior:

$$\vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij} \quad (2.3)$$

Las fuerzas son iguales en módulo y de sentido contrario, pero están aplicadas a cuerpos distintos, cada una de ellas a uno de los dos cuerpos en interacción; por eso, en general, no se anulan. Las fuerzas elementales entre dos cuerpos son vectores que van siempre en la dirección de la línea que los une, por lo que las únicas configuraciones posibles son las de la figura 2.2, en un caso atractivas y en el otro, repulsivas.

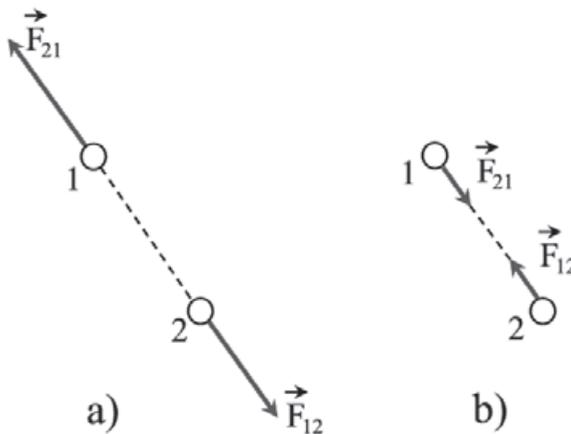


Fig. 2.2. Fuerzas entre dos cuerpos, a) repulsivas, b) atractivas.

Ejemplo. Según la tercera ley, la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo cuya masa es igual a 1 kg es igual a la que ejerce éste sobre la Tierra.

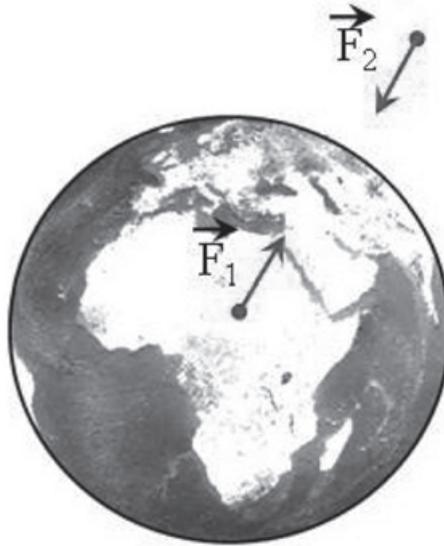


Fig. 2.3. Las fuerzas mutuas entre la Tierra y un objeto externo son iguales en módulo, pero las aceleraciones inducidas son inversamente proporcionales a la masa de cada cuerpo. Para un objeto de tamaño “normal”, la aceleración inducida sobre la Tierra es inapreciable.

Pero a partir de la segunda ley sabemos que las aceleraciones inducidas son muy distintas. En efecto:

$$m_T a_T = -mg$$

donde m_T es la masa de la Tierra ($m_T = 5,974 \times 10^{24}$ kg), a_T es la aceleración que adquiere la Tierra por el efecto de atracción gravitatoria del cuerpo de masa m , y g es la aceleración inducida por la Tierra sobre el cuerpo en cuestión cuando se encuentra cerca de su superficie, es decir, unos $9,8$ m/s². Tomando como sentido positivo el que sale de la superficie terrestre hacia la masa m y negativo el contrario, $g = -9,8$ m/s². Si la masa m es de 1 kg,

$$a_T = -\frac{m}{m_T} g = 1,64 \times 10^{-24} \text{ m/s}^2$$

es decir, la aceleración con que la Tierra “cae” hacia un cuerpo de 1 kg de masa es absolutamente inapreciable.

La tercera ley no es intuitiva ni trivial, sino que está dotada de un considerable contenido físico susceptible de ser verificado experimentalmente.

2.2 El origen de la fuerza en los animales

En el capítulo siguiente trataremos de las fuerzas elementales o básicas, que son en el mundo macroscópico la gravitación y el electromagnetismo, y también de fuerzas derivadas, que son el resultado de superponer multitud de fuerzas elementales. Todas las interacciones entre átomos o moléculas, origen de las reacciones químicas o bioquímicas y de las propiedades de la materia, son de tipo electromagnético, pero su estructura es tan compleja, debido al gran número de átomos que forman el más pequeño y sencillo sistema macroscópico, que sólo puede tratarse aproximando su resultante con ayuda de una fuerza derivada. Éste es el caso de la fuerza muscular que estudiaremos en lo que sigue.

2.2.1 *Los músculos*

La inmensa mayoría de los animales utilizan los músculos para generar la fuerza que necesitan para moverse (acelerar desde el reposo, frenar cuando están en movimiento o mantener el movimiento en contra del rozamiento del aire, del agua o con el suelo), mover o levantar presas u objetos y, en general, para realizar cualquier tipo de operación mecánica. Los vertebrados y los artrópodos tienen una estructura rígida, un esqueleto, interno en los primeros y externo en los segundos, que actúa como sustentación general de la estructura corporal y también como palanca para mover los miembros y los distintos segmentos corporales. Las estructuras rígidas supusieron una ventaja evolutiva para los primeros animales que dispusieron de ellas y aparecieron en una época relativamente reciente en la historia de la vida sobre nuestro planeta, se cree que hace unos 600 millones de años.

El esqueleto externo de los invertebrados sirve como escudo protector y, al mismo tiempo, como anclaje de los músculos que, al disponer de un punto de apoyo rígido, pudieron desarrollarse enormemente. En el caso de los artrópodos, las propiedades del esqueleto externo se deben a una proteína, la quitina, que forma estructuras muy rígidas, flexibles y ligeras. Por su parte, el esqueleto interno de los cordados permite desarrollar más fuerza muscular y una mayor movilidad de los miembros, pero no protege el cuerpo como lo hace el esqueleto externo, así que debieron suplir esta protección con un mayor tamaño corporal, más fuerza o más rapidez. Las arañas suponen un caso excepcional en cuanto al mecanismo que mueve sus extremidades. Éstas se extienden cuando aumenta la presión interna de la sangre en su interior y se contraen cuando disminuye. La presión, a su vez, se genera mediante la acción de músculos situados en el abdomen, que son los que impulsan a la sangre en las patas. En último término, el origen del movimiento en las arañas

es común al de vertebrados y el resto de los artrópodos, la contracción de los músculos, seguida, en este caso, de un sistema de transmisión hidráulica de la fuerza muscular.

El esqueleto consiste en un conjunto de elementos rígidos conectados por articulaciones flexibles para que puedan moverse unos respecto de otros y unidos por ligamentos elásticos que permiten la rotación pero no la separación. Los músculos que sirven para mover estos elementos se llaman esqueléticos, se fijan al esqueleto a través de los tendones y, cuando se contraen o se extienden, son capaces de generar movimiento o resistir cargas o impulsos sobre el animal.

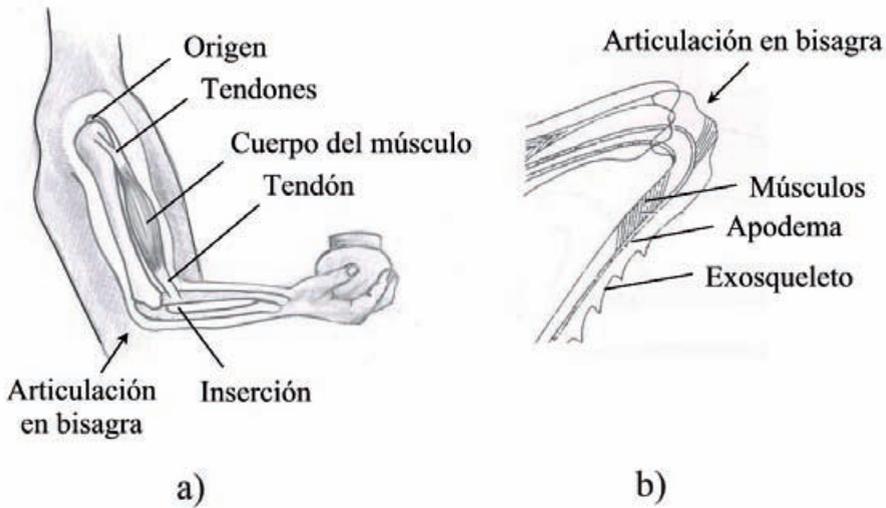


Fig. 2.4. a) Músculo de un vertebrado. b) Músculo de un artrópodo.

La forma más sencilla de articulación entre dos segmentos del esqueleto es la bisagra (ver la figura 2.4). Lo normal es que para mover dichos segmentos sean necesarios, en la configuración más sencilla, dos músculos, uno flexor, que cierra la bisagra, y otro extensor, llamado antagonista del primero, que sirve para abrirla. Pero en ciertos casos la bisagra está dotada de una estructura elástica que actúa como muelle de recuperación, como ocurre en la unión entre las dos conchas de los moluscos bivalvos. La estructura elástica que se encuentra en la articulación (charnela) de la concha de estos moluscos es un ligamento flexible de una proteína llamada abductina, que es un caucho proteico. Gracias a esta estructura, sólo se requiere un músculo, el aductor, que cuando se contrae cierra las dos valvas y comprime el ligamento de abductina, mientras que cuando se relaja, las valvas se abren por simple recuperación elástica, como puede apreciarse en la figura 2.5. Normalmente, estos animales

necesitan cerrar las valvas con rapidez para protegerse de los predadores, mediante una enérgica contracción del músculo aductor, pero la velocidad con que vuelven a separarse es de poca importancia. En la práctica pueden tardar entre dos y hasta diez segundos en abrirse después de una contracción; de ahí que sea suficiente con un solo músculo y un ligamento elástico. No obstante lo cual, las propiedades elásticas de la abductina permiten que existan moluscos bivalvos muy activos, como las veneras (*Pectinidae*), que nadan expulsando agua en dirección contraria a su movimiento, abriendo y cerrando las valvas con cierta rapidez (hasta unas tres veces por segundo).

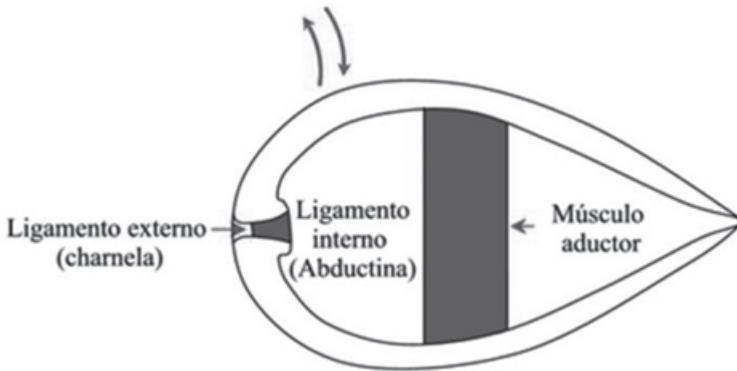


Fig. 2.5. Músculo aductor de un bivalvo y mecanismo elástico de recuperación.

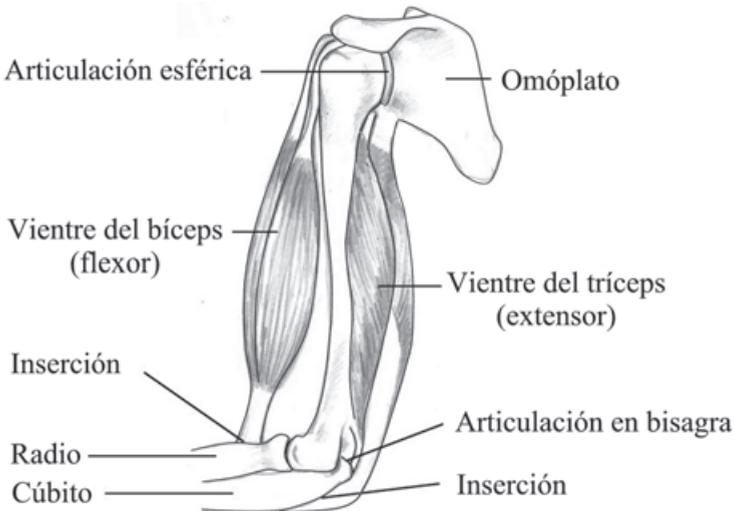


Fig. 2.6. Bíceps y tríceps braquiales en el brazo humano.

Hay muchos casos en los que para producir una mayor variedad de movimientos actúan varios músculos sobre una misma articulación. En el caso de los humanos, la rodilla y el codo son articulaciones tipo bisagra sencilla, que sólo permiten la rotación alrededor de un eje, el perpendicular al plano de la pierna o del brazo, como puede apreciarse en la figura 2.6, mientras que la articulación de la muñeca, llamada condílea, permite la rotación alrededor de los dos ejes perpendiculares al eje del antebrazo. Las articulaciones de la cadera y del hombro, llamadas esferoideas, son del tipo bola de rodamiento en el extremo de uno de los huesos alojada en una cavidad esférica del otro, lo que da libertad para girar alrededor de cualquier eje. Existen, además, otros tipos de articulación, como la pivotal, que permite el giro de la cabeza gracias a que la primera vértebra, el atlas, gira alrededor de una extensión de la segunda, el axis, que actúa como pivote, o la deslizante, que permite deslizamientos limitados, como los que se dan entre vértebras sucesivas.

En los vertebrados los músculos rodean al hueso, que es una estructura interna, mientras que en los artrópodos, el esqueleto es externo y sus elementos tienen forma tubular, alojándose los músculos en su interior y fijándose a su cara interna. En los gusanos, que no tienen esqueleto al que fijarse, hay una serie de músculos circulares y otros longitudinales a lo largo del cuerpo. Cuando se contraen los músculos longitudinales, el gusano se acorta, pero al conservarse su volumen total, se hace más grueso, por lo que los circulares deben extenderse. Por el contrario, si los músculos circulares se contraen, el animal se hace más delgado al tiempo que se alarga, lo que implica que los longitudinales deben extenderse. Los movimientos laterales se generan contrayendo sólo los músculos longitudinales de un lado del cuerpo y extendiendo los del lado contrario.

2.2.2 *Las fibras musculares*

En general, un músculo esquelético es un haz de células, o fibras, que se mantienen unidas gracias a un tejido conectivo de colágeno que se funde en el tendón y éste transmite el movimiento al hueso mediante su inserción en el mismo. El hueso, por su parte, es una estructura rígida y elástica a la vez, de fibras de colágeno, carbonato cálcico, otras sales de calcio y magnesio y agua. Una fibra muscular consiste en una membrana plasmática que contiene un conjunto de núcleos dispersos situados inmediatamente debajo de ella y un citoplasma, constituido por miles de miofibrillas. Las fibras musculares pueden llegar a tener, en el caso de los humanos, hasta unos 30 *cm* de longitud y entre 0,005 y 0,10 *mm* de ancho. Las miofibrillas,

por su parte, tienen la misma longitud que las fibras y son las responsables de la contracción del músculo y, por lo tanto, del desarrollo de la fuerza muscular y los movimientos corporales.

Las neuronas motoras transmiten las señales desde la médula espinal, ganglios u otras estructuras nerviosas e inervan las fibras musculares estimulando su contracción. **Para el caso de miembros cuyos movimientos son simples y en los que cooperan muchas fibras, como el bíceps, una misma neurona puede controlar cientos de fibras musculares, mientras que en el caso de movimientos delicados, como los del ojo, la laringe o los dedos, una neurona controla unas pocas fibras, incluso una sola de ellas. Se llama unidad motora al conjunto formado por la motoneurona y todas las fibras que ésta inerva.** En los músculos esqueléticos de los vertebrados, cada fibra recibe señales de una sola neurona (señal que puede compartir con otras fibras), mientras que en muchos invertebrados una fibra muscular puede recibir señales de varias neuronas.

Hay otros tipos de músculo, como el cardíaco, parecido al esquelético pero sin inserción en un hueso, con fibras que se ramifican e interconectan y con un solo núcleo por célula, y los músculos llamados lisos, que no presentan las estriaciones de los dos anteriores, y que son los responsables de los movimientos involuntarios de los vasos sanguíneos, los intestinos y, en general, de todos los sistemas tubulares y órganos huecos. Las fibras de esta última clase de músculo se contraen más lentamente que las de los músculos esqueléticos, que son las que vamos a estudiar en más detalle.

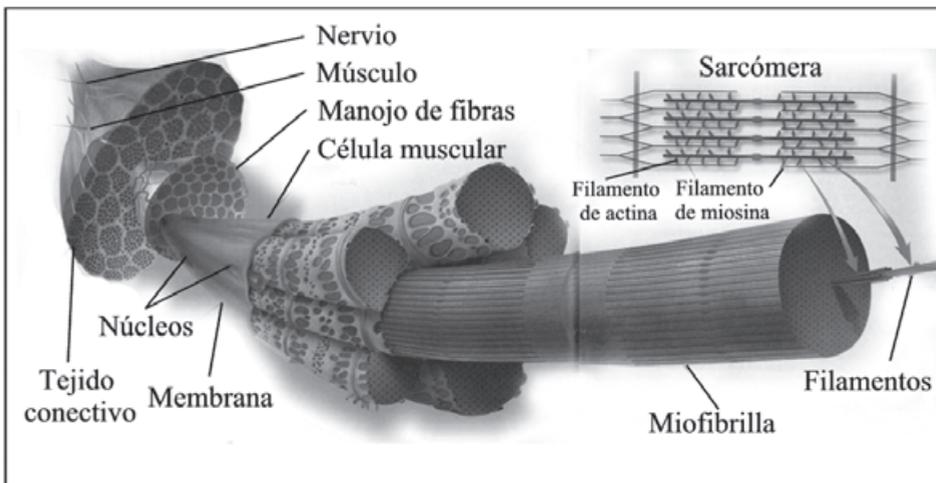


Fig. 2.7. Esquema de un músculo con las células musculares, las miofibrillas y las sarcómeras. Andersen *et al.* (2000).

Cada miofibrilla está compuesta por unidades repetidas llamadas **sarcómeras**, dispuestas **longitudinalmente**, una a continuación de la otra, y unidas por discos que reciben el nombre de discos Z. Las sarcómeras de los vertebrados tienen una longitud de unos $1,5 \mu\text{m}$ ($0,0015 \text{ mm}$) cuando están contraídas y pueden llegar al doble cuando están completamente extendidas, siendo justamente **su capacidad para variar de longitud lo que hace posible que los músculos se contraigan y ejerzan una fuerza sobre las estructuras óseas en las que se insertan**. Cada sarcómera contiene filamentos de un par de proteínas, el filamento grueso de miosina y el fino de actina, que tienen la propiedad de poder deslizarse uno respecto del otro. Están, además, colocadas de forma que la posición de las sarcómeras de una miofibrilla coincide con la de las miofibrillas adyacentes y así, las zonas en las que son predominantes uno u otro filamento están en el mismo plano transversal a la fibra muscular y eso es lo que produce su característico aspecto estriado. En la figura 2.8 puede verse la disposición de filamentos que corresponde a las sarcómeras en estado de relajación y de contracción. En la figura 2.9 se observan las distintas bandas que se distinguen en el tejido muscular y la superposición de filamentos a que corresponde cada una de ellas.

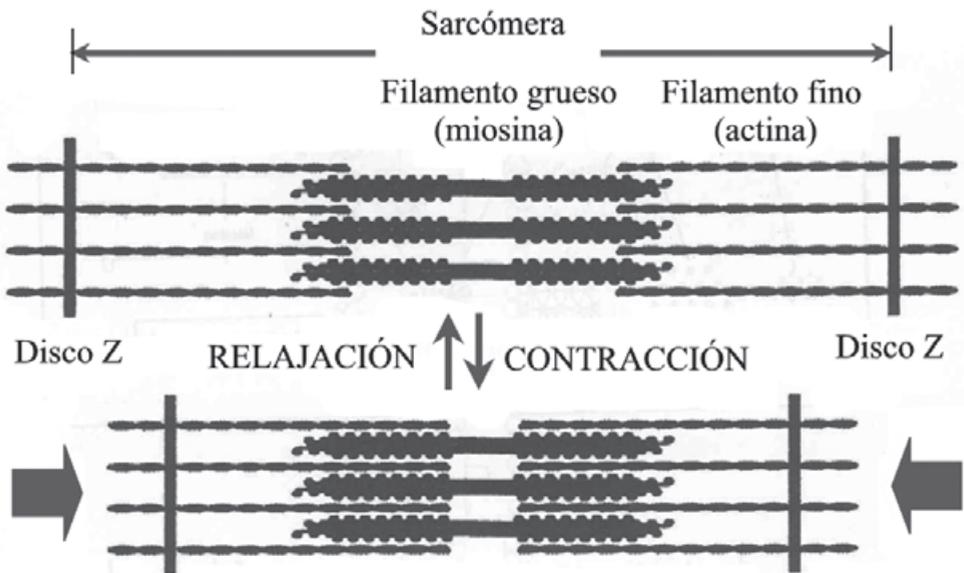


Fig. 2.8. Los filamentos gruesos (de miosina) y finos (de actina) deslizan unos respecto de los otros modificando la longitud de cada sarcómera.

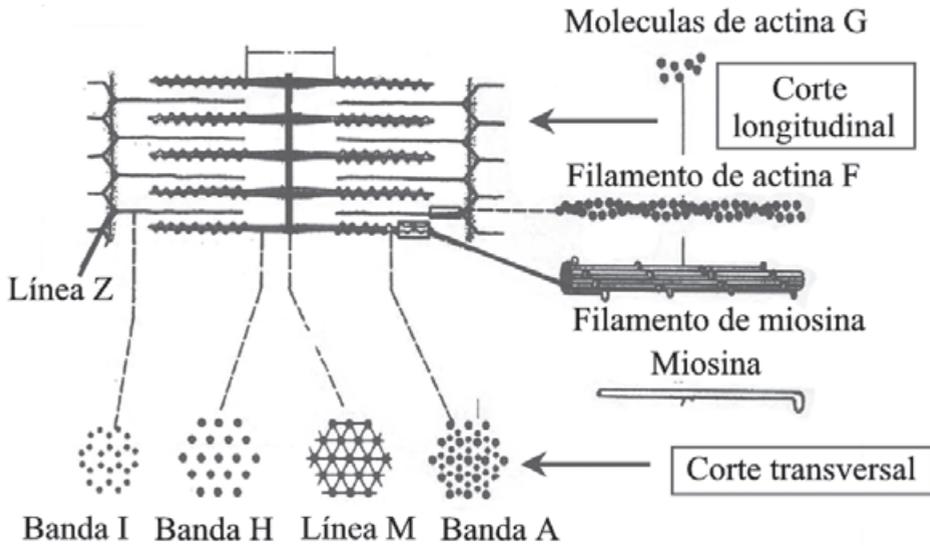


Fig. 2.9. Esquema de una sarcómera y los filamentos que la componen. La banda I está compuesta por filamentos de actina, la banda A por filamentos de actina y miosina, y la banda H por filamentos de miosina. La línea M está formada por proteínas que unen los filamentos de miosina entre sí, y la línea Z es el borde de los discos Z, formados por proteínas que unen los filamentos de actina de sarcómeras adyacentes.

(Cortesía de Magdalena Cañete, Departamento de Biología de la UAM).

Los filamentos de actina están fijos a los discos Z, mientras que los de miosina pueden deslizarse paralelamente a los de actina gracias a una serie de extensiones, o puentes cruzados, situados a lo largo de la miosina y dispuestos perpendicularmente a la dirección de deslizamiento, que se fijan a distintos puntos del filamento de actina. Cada molécula de miosina tiene forma de bastón, alargada y con una cabeza globular en uno de los extremos. Cuando las moléculas de miosina se unen longitudinalmente para formar un filamento, las cabezas sobresalen y forman los puentes. Justamente, los cambios en la configuración de estos puentes, y en sus puntos de fijación, son los responsables del deslizamiento de un filamento respecto del otro, como una persona que sube y baja a lo largo de una cuerda tirando con una mano, cambiando de posición y volviendo a agarrar la cuerda en otro punto para volver a tirar, lo que implica la contracción o extensión de la sarcómera y, en consecuencia, de la miofibrilla a la que pertenece. La longitud del filamento grueso es, por lo tanto, del orden de la longitud de la sarcómera contraída, unos $1,6 \mu\text{m}$ en los vertebrados y unos 12 nm de diámetro, mientras que cada uno de los dos filamentos finos enfrentados en una sarcómera tienen alrededor de $1 \mu\text{m}$ de largo y unos 5 nm de diámetro (recordad que $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m} = 0,001 \text{ mm}$ y $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m} = 10^{-6} \text{ mm}$).

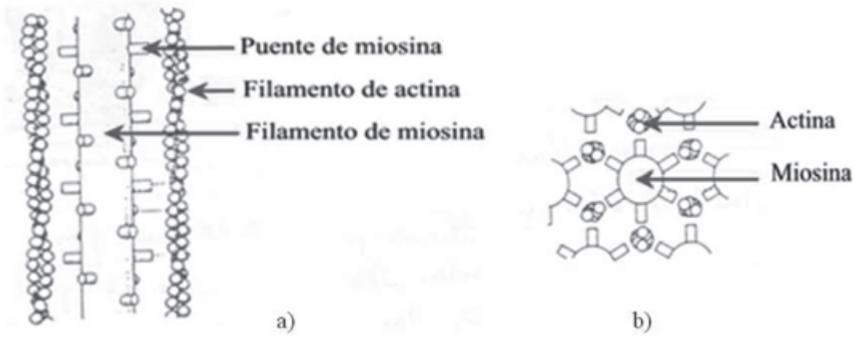


Fig. 2.10. a) Puentes de miosina. b) Disposición transversal de los filamentos de actina y miosina.

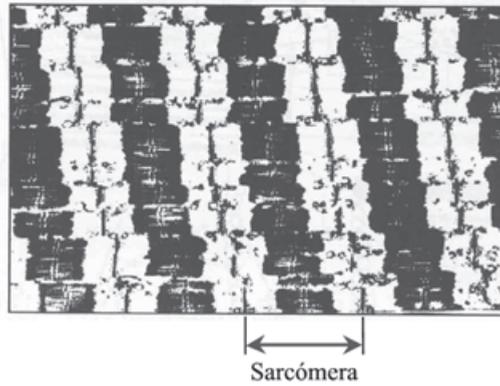


Fig. 2.11. Corte longitudinal de una fibra de músculo esquelético. Las bandas claras son las I, divididas en dos por los discos Z. Las bandas oscuras son las A, que contienen una parte más clara, correspondiente a las bandas H, que, a su vez, están divididas en dos por las líneas M. (Cortesía de Magdalena Cañete, Departamento de Biología de la UAM).

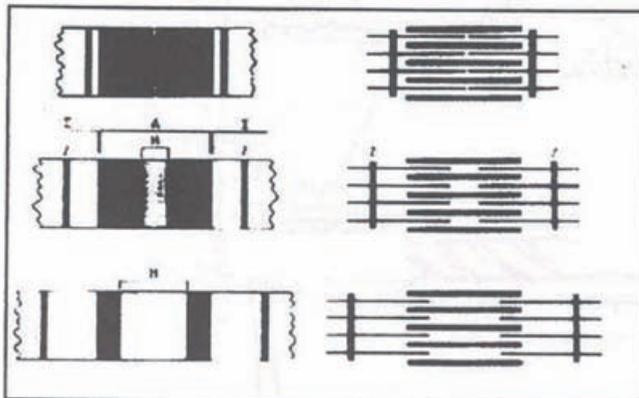


Fig. 2.12. Variación de la longitud de la sarcómera y aspecto de las estriaciones en función del grado de contracción. (Cortesía de Magdalena Cañete, Departamento de Biología de la UAM).

La disposición transversal es tal que cada filamento de miosina está rodeado por seis filamentos de actina y cada uno de actina por tres de miosina (ver la figura 2.10.b). Los puentes cruzados están situados en las dos mitades de cada filamento de miosina excepto en un pequeño segmento del centro. En la posición anterior a una contracción muscular, los puentes de cada mitad del filamento grueso están dirigidos hacia el disco Z más próximo a esa mitad, de forma que, al tensionar, acercan los filamentos finos de cada sarcómera y éstos a los discos Z, con lo que la longitud total de la sarcómera disminuye, permaneciendo inmóvil el filamento grueso en su posición centrada. La contracción muscular se debe, así, al deslizamiento relativo de los filamentos, que no se acortan, ensanchan ni pliegan de ninguna forma.

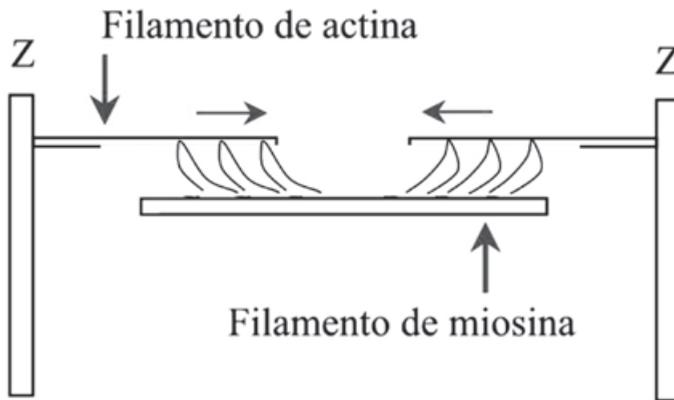


Fig. 2.13. Movimiento relativo de los filamentos en una miofibrilla y contracción de una sarcómera.

La disposición en serie de las sarcómeras hace que **el acortamiento de la miofibrilla sea igual a la suma de los acortamientos de cada sarcómera**, mientras que la fuerza con que se mantiene contraída es proporcional al número de puentes fijos en cada sarcómera, por lo que los músculos ejercen una fuerza máxima cuando están lo suficientemente contraídos como para que todos los puentes estén enganchados, pero sin que la contracción sea excesiva, en cuyo caso los filamentos de miosina se acercarían demasiado a los discos Z, e incluso llegarían a chocar con ellos, sin una ganancia en el número de puentes enganchados.

En la figura 2.14 puede verse la relación entre la fuerza generada por cada sarcómera y su longitud. Cuando está completamente extendida no hay puentes enganchados y la fuerza tiende a cero, mientras que cuando está tan contraída que los extremos del filamento grueso chocan con los discos Z, la fuerza también se anula. El máximo de fuerza se obtiene para una longitud en la que todos los puentes están activos. Lo normal es que, en todos los

movimientos, los músculos tengan un grado de contracción tal que la fuerza esté cerca del máximo, es decir, tal que longitud de las sarcómeras varíe entre $1,7 \mu\text{m}$ y $2,5 \mu\text{m}$. Por ejemplo, las sarcómeras de los músculos flexores de una rana cuando están extendidas, en disposición de iniciar el salto, tienen una longitud de $2,3 \mu\text{m}$, mientras que cuando despegan, una vez que las ha contraído, han pasado a tener una longitud de $1,8 \mu\text{m}$ y, por lo tanto, se han mantenido todo el tiempo en longitudes óptimas desde el punto de vista de la fuerza que pueden desarrollar.

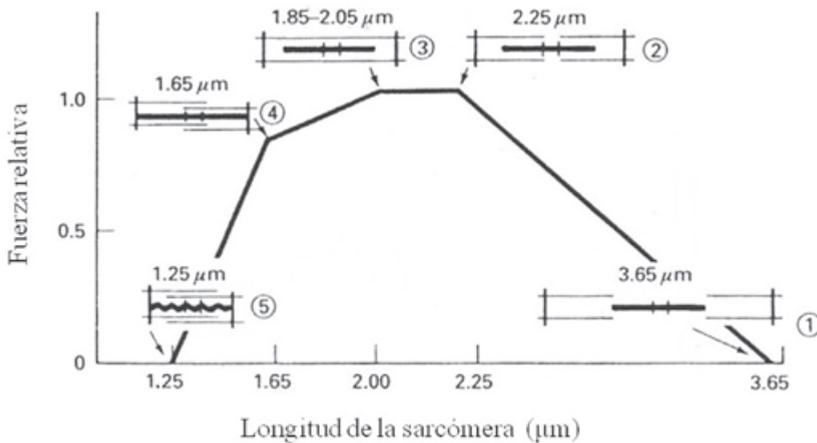


Fig. 2.14. Fuerza relativa en función de la longitud de la sarcómera. Randall *et al.* (1998)

Al actuar las miofibrillas en paralelo, la fuerza de cada una es independiente de las otras, siendo la fuerza total de un músculo la suma de las fuerzas desarrolladas por las miofibrillas que lo componen, lo que implica que es proporcional a su sección transversal; cuanto más grueso es un músculo, más miofibrillas contiene y mayor es la fuerza que puede desarrollar. Los músculos esqueléticos de los vertebrados son capaces de ejercer una fuerza máxima de $300.000 \text{ N/m}^2 \approx 30 \text{ N/cm}^2$. Ya veremos que la unidad de presión en el SI, llamada pascal, se define de forma que $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$, con lo que la fuerza máxima por unidad de sección transversal en un músculo es de unos 300.000 Pa , o bien de unos 300 kPa .

Las sarcómeras de los músculos de ciertos artrópodos son más largas, llegando, por ejemplo, hasta unos $5,5 \mu\text{m}$ cuando están contraídas en el caso de langostas y saltamontes, lo que implica que el número de puentes activos es superior y la fuerza que pueden desarrollar es también superior. En el caso de langostas y saltamontes, la fuerza máxima por unidad de sección es de unos 800 kPa . Este mismo valor es el que corresponde a la fuerza máxima desarrollada por el músculo aductor de los moluscos bivalvos.

Ejercicio. Un músculo de rana de 1 cm^2 de sección contiene del orden de 5×10^{10} filamentos gruesos. Como un músculo de esa sección es capaz de generar 30 N de fuerza, cada filamento genera $\frac{30}{5 \times 10^{10}} = 6 \times 10^{-10}\text{ N}$. Como hay unos 150 puentes en cada mitad del filamento, cada uno de éstos tira con una fuerza de unos $4 \times 10^{-12}\text{ N}$.

Nótese que si en 1 cm^2 de sección hay 5×10^{10} filamentos, entonces a lo largo de 1 cm de longitud sobre dicha sección hay $\sqrt{5 \times 10^{10}} \approx 2,24 \times 10^5$ filamentos, lo que implica que la distancia media entre sus centros es:

$$d \approx \frac{10^{-2}}{2,24 \times 10^5} \approx 4,5 \times 10^{-8}\text{ m} = 45\text{ nm}$$

que es una distancia del todo compatible con el grosor de unos 12 nm de cada filamento.

La velocidad a que un músculo se contrae se suele medir en longitudes por segundo, de forma que si una miofibrilla se contrae hasta la mitad de su longitud en $0,5$ segundos, se dice que tiene una velocidad de contracción de 1 longitud por segundo (que es el resultado de dividir media longitud por el medio segundo que tarda en contraerse). Los músculos más rápidos conocidos son los de los ojos de ratas y ratones, en los que la velocidad de contracción puede llegar hasta unas 25 longitudes de fibra por segundo. Las fibras de otros músculos de esos mismos animales y de otros vertebrados se sitúan en unas pocas (3 a 10) longitudes por segundo, mientras que los de una tortuga se contraen con una velocidad del orden de $0,1$ longitudes por segundo. Por otra parte, la velocidad de contracción es inversamente proporcional a la longitud de la sarcómera, así que en un artrópodo de sarcómeras largas, sus músculos pueden hacer más fuerza por unidad de masa muscular, pero se contraen más lentamente.

Cuanto más rápida es la contracción, menos fuerza se puede hacer. El máximo de fuerza sólo se puede conseguir en contracción lenta o sin contracción, con todos los puentes de miosina enganchados e inmóviles. En efecto, al tirar de los filamentos finos, los puentes de miosina, aun en el caso de que todos estén activos, en el momento previo al desenganche, llegan a estar en una posición en la que hay una reacción elástica que tiende a ejercer una fuerza en la dirección contraria; una vez desenganchados, buscan un nuevo anclaje en el que vuelven a tirar en la dirección de acortar la sarcómera. Además, la fijación al nuevo punto requiere un cierto tiempo. Por lo tanto, a gran velocidad, habrá un cierto número de puentes desenganchados y también otros que se encuentren en la posición que genera una fuerza elástica contraria.

El resultado neto es que cuando un músculo se contrae rápidamente cada puente ejerce, por término medio, una fuerza menor y además hay menos puentes activos. Ambos fenómenos dan lugar a una disminución de la fuerza ejercida por el músculo, mientras que a velocidad cero, todos los puentes están inmóviles y fuertemente sujetos ejerciendo la tensión máxima.

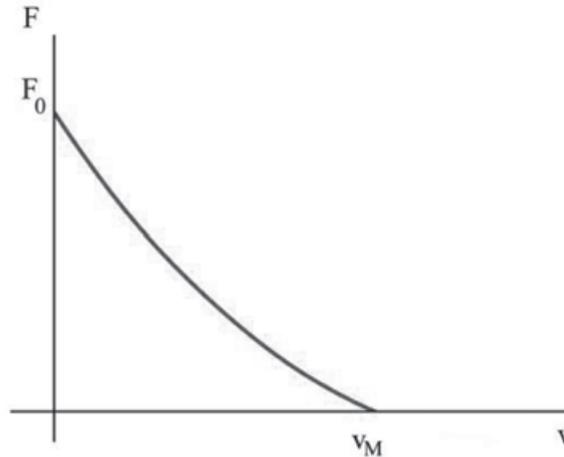


Fig. 2.15. Fuerza generada por un músculo en función de la velocidad de contracción.

Este resultado es intuitivo y conforme a la experiencia cotidiana de mover los objetos pesados lentamente y sólo ser capaces de contraer rápidamente un músculo si la carga que soporta es pequeña o nula. Archibald V. Hill, en los años 30, aproximó el comportamiento de la fuerza en función de la velocidad de contracción con ayuda de la siguiente expresión:

$$F = F_0 \frac{1 - \frac{v}{v_M}}{1 + bv}$$

donde F_0 es la fuerza desarrollada para velocidad cero, v_M es la velocidad de contracción máxima y b es un parámetro que caracteriza la forma de la curva de la figura 2.15.

Los músculos más rápidos de rata o de ratón a los que nos hemos referido antes pueden contraerse tan rápidamente porque no realizan prácticamente ningún trabajo. Por el contrario, la tensión de un músculo que no varía de longitud, como cuando empujamos sobre una pared o tiramos de un soporte fijo, es máxima y produce lo que se llama contracción isométrica, aunque no se produce contracción en sentido literal, pero sí estimulación nerviosa de las fibras musculares. Cuando sí se produce un acortamiento del músculo, se dice que la contracción es isotónica.

2.2.3 Fibras rápidas y lentas

Existen diferentes variedades de moléculas de miosina, con características funcionales que modifican su velocidad de deslizamiento. Ésta depende, a su vez, de la velocidad con que se extraiga la energía necesaria para romper el anclaje de los puentes y volver a fijarlos en otro punto. Cada operación de desanclaje y nuevo anclaje requiere hidrolizar una molécula de ATP (Adenosín Trifosfato o Trifosfato de Adenosina) y gastar la energía contenida en su enlace de fósforo de alta energía. Las fibras más lentas pueden obtener la energía necesaria del ATP sintetizado directamente por fosforilación oxidativa a partir de los hidratos de carbono y el oxígeno, desprendiendo CO_2 en el proceso. Cuando las reservas de glucógeno en el músculo se agotan, el aporte de carbohidratos es insuficiente y, si el esfuerzo persiste aunque de forma no muy intensa, el organismo puede utilizar grasas como fuente de energía química y, en casos extremos, incluso proteínas. En todo caso, la velocidad de la fibra está limitada por la velocidad de incorporación del oxígeno a los órganos respiratorios, de su difusión en la sangre y del transporte a través del flujo sanguíneo al tejido muscular. Este mecanismo directo es el que usan los músculos llamados aerobios y el ejercicio que de él se deriva se conoce también como ejercicio aerobio.

Sin embargo, los vertebrados (y algunos invertebrados) pueden utilizar otro mecanismo, el llamado metabolismo anaerobio, que es capaz de generar estallidos de actividad muscular demasiado violentos y rápidos como para depender del aporte normal de oxígeno. En este caso, la energía necesaria se obtiene a partir de ATP sintetizado en procesos que no consumen oxígeno. Así, durante el esfuerzo muscular máximo, el ATP puede sintetizarse a partir de la fosfocreatina presente en el músculo con una eficacia y rapidez enormes, aunque los depósitos de esta sustancia se agotan en un periodo de entre ocho y diez segundos, para el caso de los humanos, debido a que la concentración de fosfocreatina sólo es unas pocas veces mayor que la de ATP. Este mecanismo se conoce como anaeróbico aláctico.

Si la actividad muscular intensa se prolonga, entonces las moléculas de ATP son sintetizadas por glucólisis, pero el ácido pirúvico resultante no se oxida en las mitocondrias por el procedimiento aerobio normal, sino que se convierte en ácido láctico. Este proceso no consume oxígeno, pero genera ácido láctico como desecho y se conoce como mecanismo anaeróbico láctico. Se trabaja, así, con una deuda de oxígeno y se acumula ácido láctico, que tiene efectos tóxicos en el músculo, produciendo una acidez que perturba la actividad enzimática responsable de la formación de los puentes entre filamentos y llega a bloquear su funcionamiento.

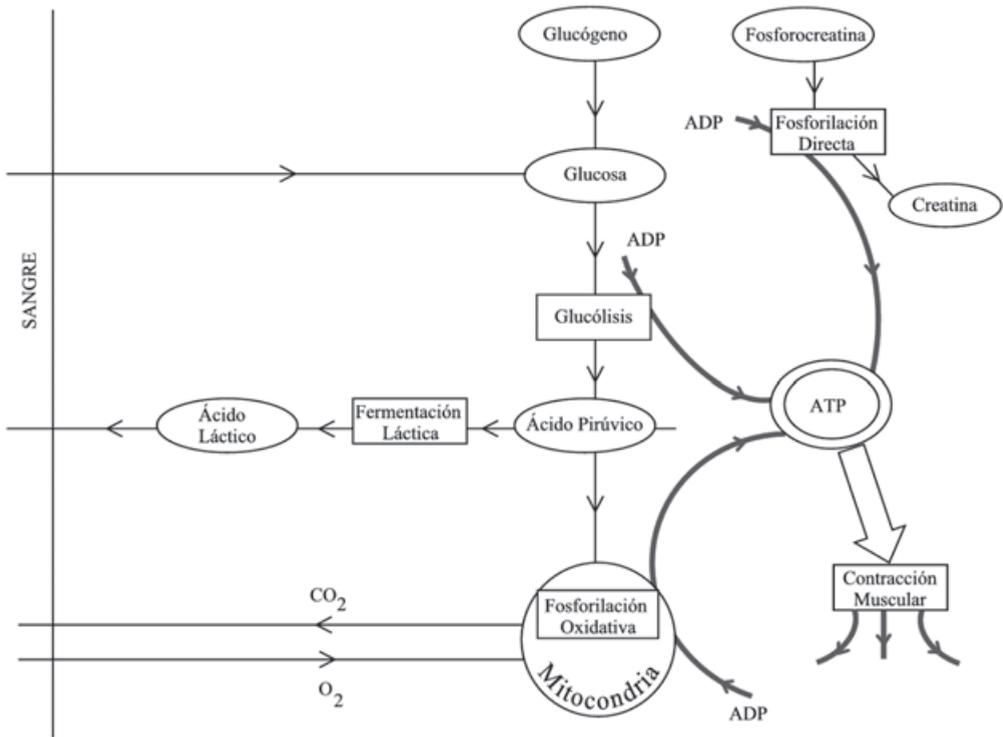


Fig. 2.16. Los tres procesos que regeneran el ATP necesario para suministrar energía a las miofibrillas y producir la contracción muscular.

Así, la prolongación de un ejercicio muy intenso da lugar a sensaciones de agarrotamiento, dolores y dureza muscular, junto con la imposibilidad de mantener la intensidad del esfuerzo. Al hacer vida normal, el contenido de ácido láctico es de un milimol por litro de sangre; si mantenemos una carrera continuada y suave normalmente se estabiliza en unos 2 a 3 milimoles por litro, y cuando la concentración supera los 20 milimoles por litro de sangre la situación se hace prácticamente insostenible. Eso es lo que ocurre con los corredores de 400 metros, que mantienen su esfuerzo prácticamente al máximo nivel y llegan a acumular, al final de la carrera, hasta 25 milimoles de ácido láctico por litro de sangre, lo que provoca, en atletas poco entrenados, descoordinación muscular, dolores intensos, vómitos, etc. Una carrera de 500 metros a este mismo nivel traspasaría ya el umbral de lo insostenible para el organismo.

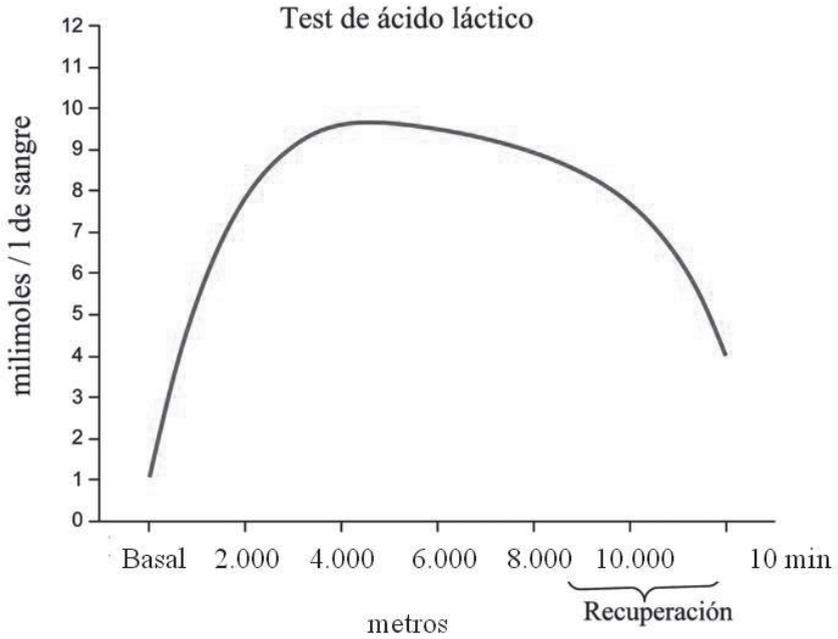


Fig. 2.17. Test de ácido láctico realizado a un fondista de élite. El atleta ha corrido 4 series de 2.000 metros cada una a 4 min. 40 seg. con 30 seg. de recuperación entre series.

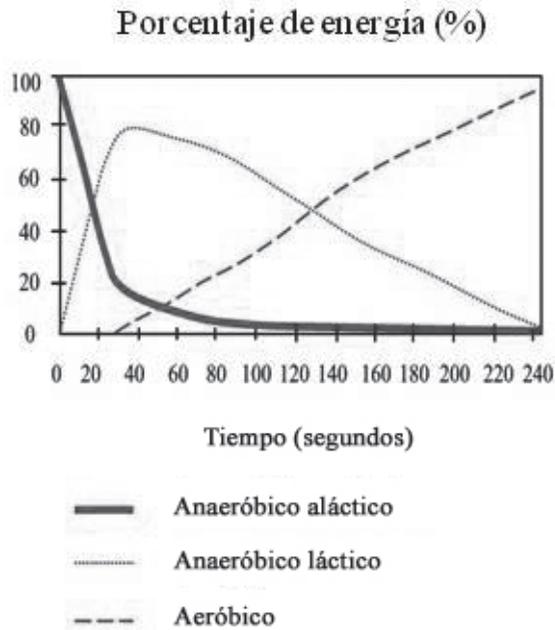


Fig. 2.18. Tipos de metabolismo para un ejercicio intenso y sostenido en función del tiempo.

En consecuencia, en los intervalos de reposo entre periodos de actividad anaerobia, es imprescindible un aporte extraordinario de oxígeno para producir energía adicional que elimine el ácido láctico existente y “saldar” la deuda de oxígeno contraída. Un atleta que respira afanosamente después de una carrera rápida está, justamente, contrarrestando la acumulación de ácido láctico mediante una incorporación extraordinaria de oxígeno al organismo. Por esta misma razón, el ejercicio anaerobio no puede durar mucho, al no tolerar el organismo el exceso de ácido láctico durante mucho tiempo.

Las fibras musculares son, en lo que se refiere a su velocidad de contracción y procesamiento de energía, de varios tipos: las tónicas, muy lentas, capaces de contracciones continuas pero a pequeña velocidad, útiles para el mantenimiento del tono postural, y las fásicas, que son las que mueven las extremidades. De éstas, **las fibras lentas, o de tipo I, son aeróbicas**, con una gran resistencia a la fatiga, desarrollan poca fuerza por unidad de sección muscular y tienen muchas más mitocondrias en su citoplasma que las anaeróbicas a fin de asimilar el oxígeno necesario simultáneamente con el gasto de energía, lo que, junto con la gran concentración de mioglobina y alta capilarización, les da un tono rojizo, distinguible a simple vista. Las fibras lentas son más económicas desde el punto de vista energético y, por lo tanto, presentan una ventaja evolutiva cuando no es necesario moverse a gran velocidad, como es el caso de las tortugas, que cuentan con una sólida protección pasiva gracias a su caparazón. **Las fibras fásicas rápidas del tipo IIa usan los mecanismos aerobio y anaerobio**, con una resistencia a la fatiga y una fuerza por unidad de sección intermedias, tienen muchas mitocondrias y sirven para mantener una locomoción sostenida y vigorosa, como en el vuelo de las aves. Por último, **las fibras del tipo IIb se apoyan esencialmente en el metabolismo anaerobio**, son muy rápidas pero muy poco resistentes a la fatiga, desarrollan una gran fuerza por unidad de sección y tienen poca mioglobina, lo que les da un tono más pálido.

Por ejemplo, la masa muscular de los peces es, en su gran mayoría, anaerobia para permitir rápidos y bruscos esfuerzos, aunque de corta duración, y por eso tiene un tono predominantemente blanco, mientras que hay una capa de músculo rojizo bajo la piel que es la que sirve para nadar lentamente de forma continuada. Una carpa (*Cyprinus carpio*), por ejemplo, da un coletazo cada 0,4 segundos en natación continua mientras que en respuesta a una señal de peligro es capaz de dar un coletazo cada 0,025 segundos. En general, las fibras lentas son importantes para todo tipo de ejercicios de resistencia, como la carrera larga o el ciclismo, mientras que las fibras rápidas son las que entran en juego en los momentos de máxima potencia, como en el *sprint* o la halterofilia.

En el caso de corredores de distancias cortas y gran velocidad, las reservas de glucógeno existentes en el músculo se agotan tras un intervalo de 6 a 8 segundos, momento en el que empieza a ser dominante el mecanismo de producción de ácido láctico, el cual, a su vez, no puede prolongarse más allá de unos 40 segundos. Como puede verse en la figura 2.18, las distancias de 100 y 200 metros se basan casi exclusivamente en el glucógeno muscular y el metabolismo anaerobio, aunque el aerobio, que funciona de forma permanente, sigue proporcionando un 5 % de la energía necesaria en el primer caso y un 10 % en el segundo. Por el contrario, la carrera de los 400 metros (que dura más de 40 segundos) se encuentra en el límite de la acumulación de ácido láctico que puede soportar el organismo y requiere ya una contribución significativa del mecanismo aerobio.

En una persona adulta hay, aproximadamente, un cincuenta por ciento de fibras de cada clase (I y II) en los músculos directamente responsables de la locomoción, por ejemplo en el cuádriceps, pero hay diferencias individuales muy grandes, tanto genéticas como derivadas del entrenamiento.

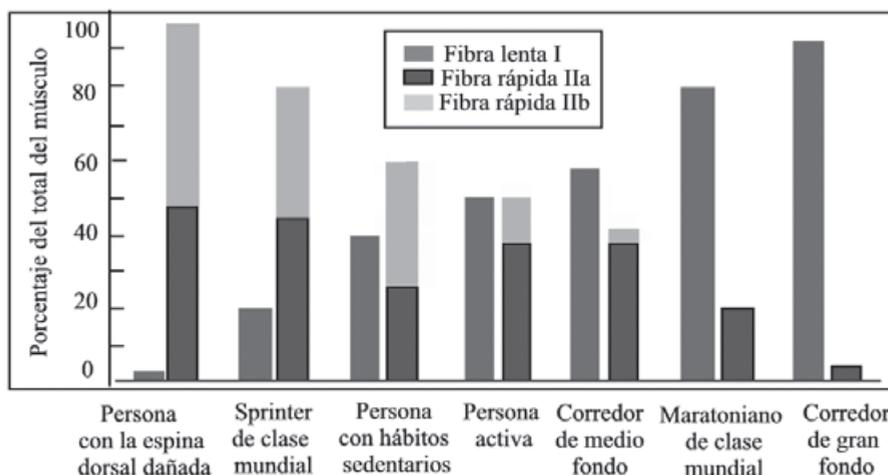


Fig. 2.19. Composición del tejido muscular en las piernas de un corredor según su especialidad. Andersen *et al.* (2000).

Una persona con un 95 % de fibras lentas podría ser un buen maratoniano pero no un buen *sprinter*, mientras que si tiene únicamente un 20 % de fibras lentas, ocurrirá lo contrario. Ambas características tienen un fuerte componente genético y el entrenamiento sólo puede cambiar ligeramente el balance entre los tipos de fibra.

A partir de una edad tan temprana como los 25 años se pueden perder fibras musculares, pero no ganar nuevas. Para una persona que no haga ejercicio

intenso, a los 50 años se ha reducido su masa de músculos esqueléticos en un 10 % y cuando se llega a los 80 años, se puede haber perdido del orden de la mitad de dicha masa muscular. El entrenamiento específico puede aumentar la masa muscular y contrarrestar, en el caso de las personas mayores, su pérdida, aumentando el grosor de cada fibra pero no impidiendo la disminución de su número. El engrosamiento de las fibras se produce porque aumenta el número de miofibrillas en cada una de ellas mediante la generación y el ensamblamiento de nuevos filamentos de actina y miosina. El ejercicio desencadena, en los tendones y otras estructuras asociadas a los músculos, señales químicas que activan los genes de los núcleos que producen moléculas de actina y miosina. Pero producir más filamentos requiere de más núcleos a fin de preservar una cierta relación entre el número de núcleos de una fibra y su volumen. Estos núcleos provienen de células exteriores a las fibras, llamadas mioblastos, que se dividen y proporcionan más núcleos a la célula muscular.

La falta de ejercicio se traduce en una disminución de la masa muscular que puede comprobarse en las personas que han sufrido un grave daño en la médula espinal y han perdido movilidad en la parte inferior de su cuerpo. Pero esa pérdida se refleja especialmente en las fibras lentas, que pueden desaparecer casi completamente después de varios años de falta de estímulos nerviosos sobre el músculo, lo que parece indicar que la estimulación eléctrica es necesaria para mantener el tipo de estructura de la miosina en la que se basan los músculos lentos.

2.3 La conservación del momento

2.3.1 Sistemas aislados y definición de momento

Un sistema aislado es aquel que no interactúa con ningún otro, lo que, tal y como ya hemos dicho antes, puede visualizarse como un sistema muy alejado de cualquier otro cuerpo o partícula. Un sistema aislado puede ser muy complejo internamente, con multitud de interacciones entre sus componentes y, en la práctica, puede considerarse aislado del entorno si las energías de interacción con otros sistemas son muy inferiores a las que caracterizan las interacciones internas. Un ejemplo de sistema prácticamente aislado debido a la debilidad de su interacción con el entorno es una molécula de nitrógeno del aire, mientras que otro sistema, de enorme complejidad interna, aunque también aproximadamente aislado, es una galaxia. El caso más sencillo de sistema aislado es el formado por dos únicas partículas que interactúan entre sí. Si aplicamos a este sistema las leyes de Newton, tendremos:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} = m_1 \vec{a}_1$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_{12} = m_2 \vec{a}_2$$

y, sumando ahora las dos ecuaciones y teniendo en cuenta la ecuación (2.3), obtenemos:

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = 0$$

de donde se sigue que

$$\frac{d}{dt} (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2) = 0 \quad (2.4)$$

Cuando la derivada con respecto al tiempo de una cierta magnitud cinemática (una magnitud cinemática es una función de las posiciones y las velocidades de las partículas que componen un cuerpo) es cero, ocurre que dicha magnitud no varía con el tiempo y se dice que es una constante del movimiento. La mayoría de las magnitudes cinemáticas que introduciremos en lo sucesivo son interesantes porque se conservan: son constantes del movimiento en ciertas circunstancias. Definimos el momento o momento lineal \vec{p} , también llamado cantidad de movimiento, impulso o impulsión, para una partícula, como el producto de su masa por su velocidad, y para un sistema complejo como la suma de los momentos de sus partículas:

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i \quad (2.5)$$

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i \quad (2.6)$$

Para un sistema aislado de dos partículas se sigue de la ecuación (2.4) que:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P} = \text{constante} \quad (2.7)$$

El momento de un cuerpo, al combinar masa y velocidad, es una magnitud que proporciona más información sobre su movimiento que la simple velocidad. Un camión y una mosca pueden ir a la misma velocidad, pero sus “efectos” son muy distintos debido a su distinta masa. El momento tiene en cuenta la masa y toma valores muy distintos en ambos casos aun cuando la velocidad sea la misma.

La segunda ley de Newton puede escribirse ahora, en función del momento de una partícula sometida a una fuerza, del siguiente modo:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.8)$$

que es una forma más cercana a la formulación original de Newton.

La conservación del momento total para un sistema de partículas en interacción pero aisladas del entorno se puede generalizar sin dificultad al caso de N partículas, incluso si N es enorme, siguiendo la misma pauta que para el caso de dos partículas visto anteriormente:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{P}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \cdots + m_N \vec{v}_N \right) = 0 \\ \vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N = \text{constante} \end{aligned} \quad (2.9)$$

Así pues, **el momento total de un sistema aislado es siempre una constante del movimiento**. Si en el instante inicial tenía un cierto valor, calculable a partir de las velocidades iniciales, ya siempre tendrá el mismo valor. Las velocidades de cada una de las partículas que lo componen variarán, pero deben hacerlo de tal forma que el momento total permanezca constante. Nótese que este teorema de conservación se deduce directamente de la segunda y la tercera ley de Newton y es por completo independiente del tipo de interacciones internas o del número y complejidad de los componentes del sistema.

2.3.2 Choques y desintegraciones

Este resultado puede aplicarse al caso sencillo de dos cuerpos que chocan y ese choque es la única interacción que actúa sobre ellos. **Decimos que el choque es elástico cuando los dos cuerpos salen rebotados tras la interacción sin que se modifique su número ni su naturaleza y sin que haya pérdida de energía cinética** (que definiremos en detalle más adelante).

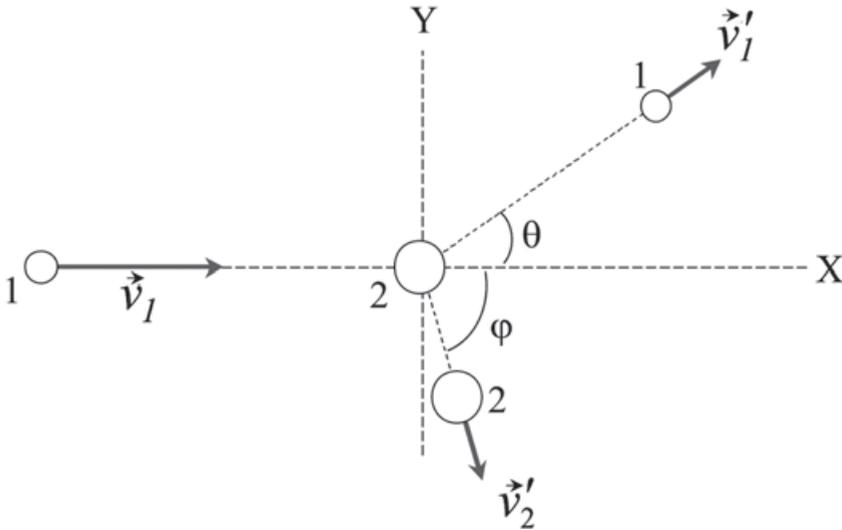


Fig. 2.20. Choque elástico entre el cuerpo 1 moviéndose a la velocidad \vec{v}_1 y el cuerpo 2 en reposo.

El caso de la figura 2.20 se supone que no hay interacción con el entorno, ni siquiera gravitatoria, por lo que el sistema de los dos cuerpos que chocan es aislado. La conservación del momento implica que:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2$$

Lo que implica, a su vez, que existe una relación entre las componentes de las velocidades con que salen las partículas y las velocidades iniciales. Suponiendo que la partícula 2 esté inicialmente en reposo y tomando el eje X a lo largo de la velocidad con que incide la partícula 1, tenemos:

$$m_1 v_1 = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x} = m_1 v'_1 \cos \theta + m_2 v'_2 \cos \varphi$$

$$0 = m_1 v'_{1y} + m_2 v'_{2y} = m_1 v'_1 \sin \theta + m_2 v'_2 \sin \varphi$$

y de estas ecuaciones se pueden despejar la velocidad de retroceso v'_2 de la partícula 2 y el ángulo φ con el que retrocede en función de la velocidad v_1 con la que sale la partícula 1 y el ángulo θ que forma dicha velocidad con la velocidad incidente:

$$v_2'^2 = \frac{m_1^2}{m_2^2} (v_1^2 + v_1'^2 - 2v_1 v_1' \cos \theta)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\operatorname{sen} \theta}{v_1 / v_1' - \cos \theta}$$

Si, por ejemplo, la partícula 1 sale de la interacción en dirección vertical hacia arriba, $\theta = \frac{\pi}{2}$, obtenemos:

$$v_2' = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{v_1^2 + v_1'^2} \quad (2.10)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{v_1'}{v_1}$$

y, si no se tiene en cuenta la conservación de la energía cinética, no es posible fijar más los parámetros de la colisión. En todo caso, independientemente de la naturaleza del choque y sin más que aplicar las ecuaciones obtenidas a partir de la conservación del momento, se sabe, a partir de la ecuación (2.10), que en el límite en el que $m_2 \gg m_1$, que corresponde al caso de una partícula en reposo con una enorme inercia, prácticamente un punto fijo sobre el que colisiona la partícula 1, $v_2' \rightarrow 0$, es decir, la partícula 2 apenas se mueve por efecto del choque.

La colisión es inelástica cuando hay pérdida de energía cinética en el choque, normalmente en forma de calor o en la deformación mecánica de los cuerpos que chocan. Un caso extremo de interacción inelástica es aquel en el que los dos cuerpos permanecen unidos, empotrados uno en el otro, tras la colisión. En ese caso la conservación del momento se expresa del siguiente modo:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_f$$

siendo \vec{v}_f la velocidad final del sistema formado por los dos cuerpos unidos. Para el caso anterior, de una partícula moviéndose a lo largo del eje X y la otra en reposo, la velocidad final tiene que estar necesariamente alineada con el eje X y su módulo será:

$$v_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \quad (2.11)$$

En el caso particular $m_1 \gg m_2$, la ecuación (2.11) indica que la velocidad final del conjunto es igual a la del cuerpo incidente. Se trata de un cuerpo pesado que prácticamente “arrolla” al más ligero, que estaba en reposo. Si, por el contrario, $m_1 \ll m_2$, entonces la velocidad final tiende a cero: un cuerpo ligero que se empotra sobre uno más pesado apenas puede moverlo.

Si las dos masas son iguales, $m_1 = m_2$, la velocidad final es la mitad de la del cuerpo incidente.

Ejemplo. Uno de los procedimientos para medir la velocidad de una bala es dispararla contra un bloque de madera de gran masa y medir la velocidad con que éste se mueve. Si una bala de 12 g se incrusta en un bloque de madera de 6 kg y el conjunto bloque-bala sale despedido a una velocidad de 0,8 m/s, la velocidad con la que ha tenido que incidir la bala es:

$$v_1 = \frac{6,012}{0,012} \times 0,8 \approx 401 \text{ m/s}$$

Otro de los casos sencillos en los que puede aplicarse la conservación del momento es el de un sistema que se fragmenta en otros varios como consecuencia de sus interacciones internas. Es el caso de un proyectil que se rompe en vuelo, el de un núcleo o un átomo que se desintegra, o el de un cohete que va eliminando parte de su combustible interno. En todos estos casos, el estado inicial es el de un solo cuerpo, por lo que la ecuación general que expresa la conservación del momento es:

$$m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_N\vec{v}_N \quad (2.12)$$

donde m_i, \vec{v}_i son las masas y velocidades de los fragmentos en los que se divide el cuerpo con una masa inicial m y una velocidad inicial \vec{v} .

Cuando la partícula inicial está en reposo y se desintegra en dos fragmentos, las velocidades con que salen despedidos deben cumplir la condición:

$$0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

lo que implica que las velocidades son paralelas y en sentido contrario, es decir, **los fragmentos salen en direcciones opuestas.**

2.3.3 La propulsión a chorro. El calamar

Los cohetes que ponen en órbita lanzaderas o estaciones espaciales y los que sacan de la Tierra las sondas que viajan a otros planetas, del mismo modo que algunos animales marinos como el calamar, se mueven gracias a la conservación del momento. En efecto, debido a sus interacciones internas (combustión del combustible que transportan o contracción muscular) generan un haz de gases o líquidos que salen a gran velocidad por una tobera, moviéndose el resto del cuerpo en la dirección contraria para conservar el momento total. Es exactamente lo mismo que ocurre cuando un globo se

deshincha y el aire sale en una dirección mientras que el globo se mueve en dirección contraria.

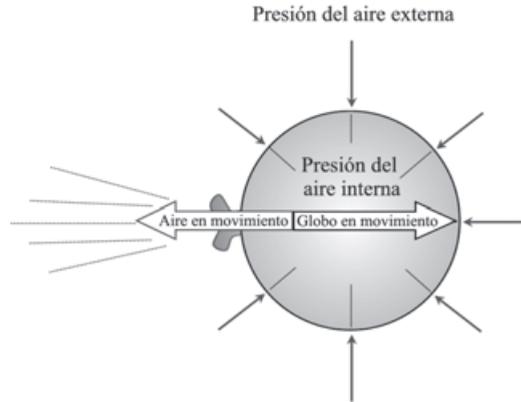


Fig. 2.21. Un globo que pierde aire en una dirección se mueve en la dirección contraria debido a la conservación del momento.

Los calamares son los invertebrados que pueden moverse a mayor velocidad en el agua, alcanzando grandes velocidades gracias al mecanismo de la propulsión a chorro, el mismo que los cohetes, es decir, aprovechando la conservación del momento. En efecto, estos animales poseen una cavidad externa al cuerpo del animal, rodeada por un manto de paredes musculosas, que se llena de agua.

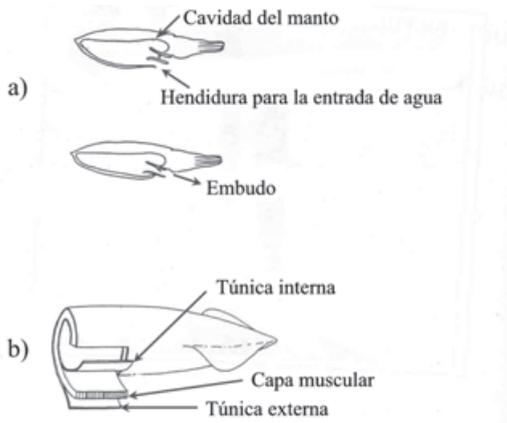


Fig. 2.22. (a) Circulación del agua en la cavidad del manto.
(b) Estructura del manto.

Los músculos circulares del manto son capaces de ejercer, al contraerse, una presión adicional sobre el agua de la cavidad del orden de 0,4 atmósferas (aproximadamente 40.000 N/m^2). El agua sale, así, expulsada a través de un

conducto estrecho, llamado embudo o sifón, a gran velocidad. Como todas las complejas interacciones que dan lugar a la contracción muscular y la expulsión del agua son internas, el momento debe conservarse, lo que **implica que el calamar se mueve en dirección contraria al agua expulsada, exactamente igual que un cohete que se impulsa expulsando gas por sus toberas.** Cuando la cavidad está vacía puede volver a llenarse a través de la hendidura, muy ancha, que forma el borde del manto y la cabeza, de forma que el agua que entra lo hace a pequeña velocidad, casi en reposo respecto del animal y no tiene efecto mecánico alguno. Mientras se llena, una válvula impide el flujo a través del embudo, pero cuando la cavidad está llena, el borde del manto se cierra sobre la cabeza y el agua no puede salir por el mismo sitio por el que ha entrado, sino sólo a través del embudo, a gran velocidad debido a la estrechez de este último.

Normalmente el calamar contrae lentamente los músculos del manto con objeto de asegurar el flujo de agua a través de las branquias, situadas en la cavidad, y respirar, pero cuando quiere moverse con rapidez las contracciones son violentas y los chorros de agua expulsada hacen que el animal adquiera una gran velocidad.

El manto es una gruesa capa de músculo protegida por dos túnicas, una externa y otra interna, de fibras de colágeno que aseguran su resistencia y una gran flexibilidad de movimientos. La capa muscular está organizada en gruesos bloques de fibras circulares, que rodean la cavidad, y fibras radiales que lo recorren longitudinalmente. Ambos tipos de fibras son antagonistas.

Así, cuando los músculos circulares se contraen, se produce una disminución en el volumen de la cavidad, al tiempo que se cierra la hendidura entre el borde del manto y la cabeza, y el agua tiene que salir por el embudo. Cuando, por el contrario, se contraen los músculos radiales, se relajan los circulares y la cavidad aumenta de volumen, inhalando agua del entorno. Las contracciones lentas están controladas a través de un sistema de muchas neuronas motoras de pequeño tamaño, mientras que las contracciones rápidas del manto se desencadenan a través de dos axones gigantes, provenientes de dos neuronas especializadas, que aseguran la sincronización del movimiento de contracción del manto en un único impulso motor y hacen que la expulsión del agua se produzca con gran eficacia.

Los calamares pueden moverse en cualquier dirección, incluso hacia adelante, girando el extremo del embudo, de forma que la extremidad por la que sale el agua se oriente siempre en dirección contraria a la del movimiento. Un calamar del género *Loligo*, de unos 20 cm de largo, puede alcanzar una velocidad del orden de los 2 m/s en una sola contracción, con un ritmo de

hasta dos contracciones por segundo, siendo la masa de agua contenida en la cavidad del orden de 0,6 veces la masa del cuerpo. Si llamamos u a la velocidad de salida del agua por el embudo y v la velocidad a que se mueve en dirección contraria el cuerpo del calamar tras la contracción, en el caso en que ésta sea rápida y pueda considerarse que el agua sale instantáneamente, la conservación del momento, en el caso de partir de una situación en la que el animal está en reposo, implica que:

$$P = m_C v - m_A u = 0$$

$$v = u \frac{m_A}{m_C}$$

donde m_A y m_C son, respectivamente, la masa del agua expulsada y la del cuerpo del calamar.

Debido a la fuerte fricción con el agua, la fórmula así obtenida nos da sólo la velocidad inicial del animal, que se amortigua rápidamente. Si se tiene en cuenta el tiempo a lo largo del cual se produce la expulsión del fluido (agua para el calamar o gases para un cohete) y el cambio progresivo en la relación de la masa expulsada y la que se mueve en dirección contraria, se encuentra una expresión más complicada y precisa que no consideraremos aquí. A partir de la relación entre las masas m_A y m_C obtenemos la relación entre la velocidad de salida del agua por el embudo, u , y la velocidad de retroceso del calamar, v :

$$v = u \frac{m_A}{m_C} = u \frac{0,6m_C}{m_C} = 0,6u$$

y tomando ahora la velocidad inicial adquirida por propulsión, por ejemplo, igual a 2 m/s, podemos despejar u , obteniéndose un valor de 3,3 m/s. Hay calamares voladores que salen despedidos fuera del agua debido al impulso que se dan y han llegado a aterrizar sobre cubiertas de barcos situadas a cuatro metros de altura. Un calamar de este tipo, como el *Dosidicus gigas*, para elevarse a una altura de cuatro metros debe alcanzar los 9 m/s de velocidad inicial, lo que da, suponiendo la misma proporción entre masa de agua y masa corporal que en el caso anterior, la considerable velocidad de salida del agua por el embudo de unos 15 m/s. En realidad, los resultados así obtenidos representan una cota inferior a las velocidades del agua expulsada que, teniendo en cuenta los efectos de la expulsión progresiva, siempre es algo mayor, en este caso unos 19 m/s.

El calamar es el animal que más ha perfeccionado el sistema de propulsión a chorro basado en la conservación del momento, pero otros cefalópodos lo

utilizan también, así como algunos moluscos bivalvos, o larvas de insectos que expulsan agua por el recto, lo que les sirve para desplazarse a pequeñas velocidades, y hasta las medusas, cuyo movimiento se basa en la circulación del agua generada por la contracción de su cuerpo en forma de campana.

2.4 El centro de masas

Definición

Para un sistema formado por un conjunto de N partículas, por ejemplo un ser vivo en el que las N partículas son las moléculas que lo componen o las distintas partes de su cuerpo, se puede definir un punto especial, llamado centro de masas, que es **un promedio ponderado de las posiciones de esas partículas**:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \quad (2.13)$$

donde $M = \sum_{i=1}^N m_i$ es la masa total del sistema. Para el caso de partículas de igual masa, el centro de masas es simplemente la posición promedio, como puede verse si se ponen todas las masas m_i iguales a un cierto valor m :

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{r}_i$$

Sin embargo, para componentes con masas desiguales, el centro de masas se sitúa más cerca de las masas más grandes.

Ejemplo. Para dos partículas iguales, el centro de masas es simplemente el punto intermedio entre las dos, mientras que cuando una de ellas, por ejemplo m_p , es mucho mayor que la otra, tenemos:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \approx \frac{m_1 \vec{r}_1}{m_1} = \vec{r}_1$$

Es decir, el centro de masas se sitúa cerca de la posición de la partícula más pesada. Es el caso del sistema Sol-Tierra. Si tomamos como origen de coordenadas la posición del centro del Sol, la Tierra se encuentra a una distancia aproximada de 150 millones de kilómetros y, sabiendo que la masa del Sol es unas 330.000 veces superior a la de la Tierra, podemos calcular la posición del centro de masas:

$$x_{CM} = \frac{m_{Sol} \times 0 + m_T \times 1,5 \times 10^8}{330.000m_T + m_T} \approx 450 \text{ km}$$

es decir, dado que el radio del Sol es de unos 700.000 km, el centro de masas del sistema Tierra-Sol se encuentra en un punto situado dentro del Sol, muy próximo a su centro. Lo mismo ocurre en el sistema Tierra-Luna y en el sistema protón-electrón de un átomo de hidrógeno, sólo que en este caso la masa del protón es unas 1.840 veces superior a la del electrón.

Si el sistema es continuo y no formado por un conjunto discreto de partículas, la definición de centro de masas puede generalizarse considerando cada elemento diferencial de volumen como un punto de masa dm situado en una cierta posición \vec{r} y sustituyendo la suma por una integral:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} dm = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho d^3 \vec{r}$$

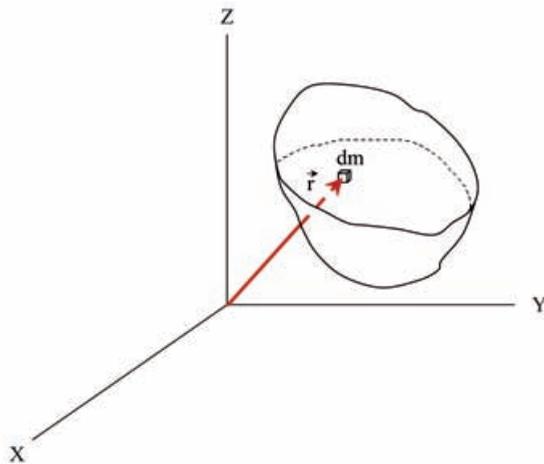


Fig. 2.23. Cuerpo continuo.

donde la integral está extendida a todo el volumen V del cuerpo, ρ es la densidad, que puede variar con la posición, y M es su masa total.

Ejemplo. Consideremos el caso simple de un cuerpo unidimensional, es decir, una varilla. En ese caso, podemos tomar el eje X a lo largo de la varilla y, de esta forma, sólo interviene la coordenada x .



Fig 2.24. Varilla unidimensional: (a) de densidad uniforme, (b) de densidad proporcional a la distancia a uno de sus extremos.

Para un objeto unidimensional, se define la densidad lineal como la masa por unidad de longitud. Escogiendo el origen de forma que coincida con el extremo izquierdo de la varilla, y llamando λ a la densidad lineal, $dm = \lambda dx$, el centro de masas es:

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^L x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx$$

Para el caso de una varilla homogénea, es decir, de densidad uniforme, $M = \lambda L$ y la posición del centro de masas:

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \lambda \frac{L^2}{2} = \frac{L}{2}$$

se encuentra en el centro de la varilla, como resulta intuitivo. Consideremos ahora que la densidad varía con la posición, aumentando linealmente a lo largo de la varilla, $\lambda = kx$, siendo k una constante. En este caso:

$$M = \int_0^L dm = \int_0^L \lambda dx = k \int_0^L x dx = \frac{kL^2}{2}$$

y el centro de masas estará situado en:

$$X_{CM} = \frac{1}{M} \int_0^L x dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda dx = \frac{k}{M} \int_0^L x^2 dx = \frac{kL^3}{3M} = \frac{2}{3}L \quad (2.14)$$

El centro de masas se encuentra en este caso escorado hacia la parte más densa de la varilla. Un ejemplo aproximado de varilla cuya densidad aumenta linealmente hacia un extremo es un bate de béisbol, y su centro de masas se encuentra, de acuerdo con la expresión (2.14), a un tercio de su longitud, aproximadamente, del extremo más grueso y a dos tercios del extremo más delgado.

Para sistemas con una cierta simetría, el centro de masas se sitúa siempre en el centro, el eje o el plano de simetría. Por ejemplo, en una esfera, un cubo o un cilindro homogéneos, el centro de masas está en el centro geométrico.

Para una persona, el centro de masas se encuentra aproximadamente a la altura del ombligo (ver el Ejercicio 2.11) y a unos tres o cuatro centímetros por delante de la vertical del punto de unión de los tobillos con los pies. **Para un sistema formado por varios cuerpos extensos, el centro de masas se calcula como si cada uno de ellos fuera puntual y toda su masa estuviera concentrada en su centro de masas.** Gracias a esta propiedad hemos podido calcular anteriormente el centro de masas del sistema Tierra-Sol, considerando que cada uno de los dos astros es un punto situado en su centro respectivo que concentra toda su masa.

El centro de gravedad se define del mismo modo que el centro de masas, pero ponderando con los pesos de las partículas y no con las masas. Naturalmente, para el caso de cuerpos sobre la superficie terrestre el peso es siempre igual a mg con g constante, por lo que coinciden centro de masas y centro de gravedad. En lo sucesivo, utilizaremos indistintamente ambas expresiones porque siempre nos referiremos a sistemas cuyos componentes están sujetos al mismo campo gravitatorio.

El movimiento del centro de masas en sistemas aislados

La velocidad con que se mueve el centro de masas de un cuerpo será:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \frac{1}{M} \vec{P}$$

Para un sistema aislado sabemos que el momento total se conserva, por lo que también la velocidad del centro de masas es constante. Así, **para un sistema complejo, con multitud de interacciones internas pero aislado del exterior, el centro de masas permanece en reposo o sigue un movimiento uniforme y rectilíneo**, independientemente de los movimientos de las partes que configuran dicho sistema. Por ejemplo, el centro de masas de un astronauta fuera de toda interacción externa, en el espacio exterior, se mueve indefinidamente con movimiento uniforme y rectilíneo. Puede girar o mover los brazos y las piernas, pero no puede alterar con sus propias fuerzas la velocidad de su centro de masas.

***Ejemplo.** Consideremos un sistema formado por un carro y una persona situada en uno de sus extremos, según la figura 2.25.*

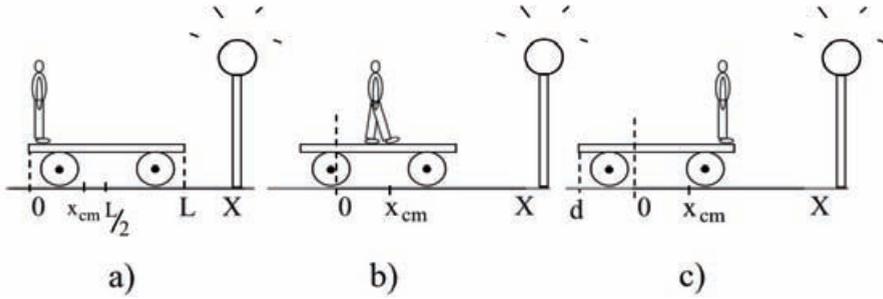


Fig. 2.25. Persona desplazándose sobre un carro que se mueve horizontalmente sin rozamiento con el suelo. (a) Situación inicial. (b) Situación intermedia. (c) Situación final.

Partimos de una situación de reposo, en la que el momento inicial es cero y, por lo tanto, la velocidad del centro de masas es cero. Si no hay interacción con el entorno porque no hay rozamiento con el suelo ni con el aire, el sistema puede considerarse aislado y la velocidad del centro de masas será indefinidamente cero, es decir, permanecerá en la misma posición que ocupaba en el instante inicial. Supondremos que el carro es simétrico respecto del plano transversal que pasa por su centro, de forma que su centro de masas está a una distancia $\frac{L}{2}$ del origen, siendo L su longitud total. Llamando M a la masa del carro y m a la de la persona, la posición del centro de masas es:

$$x_{CM} = \frac{m \times 0 + M \times L/2}{m + M} = \frac{M}{M + m} \times \frac{L}{2} \quad (2.15)$$

Si la persona puede caminar sobre el carro es porque ejerce una fuerza de fricción con los pies sobre su superficie, es decir, como resultado de interacciones internas al sistema. La conservación del momento implica que, si la persona se mueve en un sentido, el carro debe moverse en el contrario, de forma que el momento total siga siendo cero o, lo que es lo mismo, que la posición del centro de masas no varíe, lo que permite calcular la distancia que el carro ha tenido que desplazarse hacia atrás cuando la persona llega al final del mismo y se detiene. En esta situación, la posición del centro de masas es:

$$x_{CM} = \frac{m(L - d) + M\left(\frac{L}{2} - d\right)}{m + M} \quad (2.16)$$

siendo d el desplazamiento total. Igualando ahora las expresiones (2.15) y (2.16), obtenemos:

$$d = \frac{m}{m+M} L$$

Nótese que si la masa del carro es enorme respecto de la de la persona ($M \gg m$), por ejemplo un vagón de ferrocarril, la distancia retrocedida es prácticamente cero. Por el contrario, para un bote sobre el agua o un carro ligero, cuya masa sea igual a la de la persona ($M \simeq m$), la distancia retrocedida es justamente la mitad de su longitud.

Balisticardiografía

Consideremos un sistema formado por una caja de masa M que contiene un muelle sujeto rígidamente a la caja y en cuyo extremo libre puede oscilar un cuerpo de masa m .

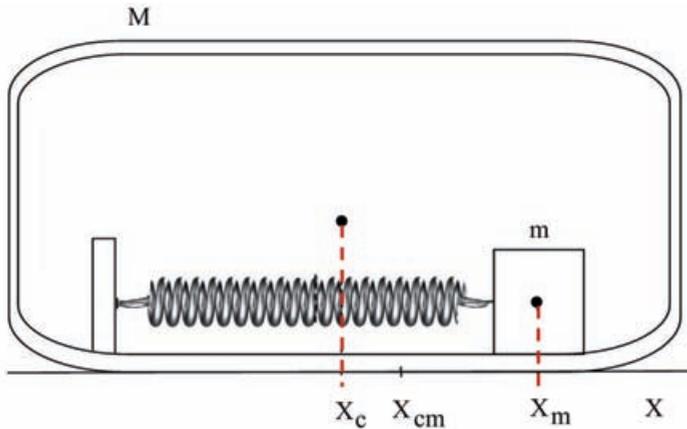


Fig. 2.26. Caja rígida de masa M en cuyo interior hay un cuerpo de masa m que puede moverse por la acción de un muelle sujeto a la caja. La posición del centro de masas de la caja es x_c y la del sistema caja + cuerpo oscilante es x_{cm} . El muelle y la sujeción de éste a la caja se toman de masa nula.

Si la caja está sobre una superficie horizontal sin rozamiento, su peso está compensado por la fuerza de contacto de la superficie, por lo que la fuerza externa neta actuando sobre el sistema es cero. Las fuerzas responsables de la oscilación del cuerpo de masa m , a través de la unión rígida entre el muelle y la caja, son internas al sistema. Si el conjunto estaba inmóvil en el momento inicial, la posición de su centro de masas respecto de un eje de coordenadas ligado a la masa será:

$$x_{CM} = \frac{Mx_c + mx_m}{M + m} \quad (2.17)$$

donde x_C es la posición del centro de la caja y x_m es la posición de la masa m . El centro de masas del conjunto no variará en el tiempo; es decir, su derivada respecto del tiempo será nula. Si tomamos como origen de coordenadas la posición del centro de masas del sistema, $x_{CM} = 0$, de acuerdo con la ecuación (2.17), tiene que cumplirse en todo momento que:

$$x_C = -\frac{m}{M} x_m \quad (2.18)$$

Si la masa ligada al muelle oscila, entonces la caja tendrá que oscilar en sentido contrario para que el centro de masas del sistema permanezca inmóvil. Si la oscilación de la masa interna tiene una amplitud x_0 , su posición vendrá dada por la expresión $x_m = x_0 \text{ sen}(\omega t)$, donde ω es un parámetro llamado pulsación (sobre el que se volverá en la sección dedicada al movimiento oscilatorio) y la caja oscilará en sentido contrario con la misma pulsación pero con diferente amplitud:

$$x_C = -\frac{m}{M} x_0 \text{ sen}(\omega t) \quad (2.19)$$

lo que asegura que se cumple la ecuación (2.18). Es decir, registrando los movimientos externos de la caja podemos deducir el tipo de movimiento que la masa m realiza en su interior.

La técnica que permite estudiar el movimiento de la sangre de una persona midiendo los pequeños movimientos del cuerpo que se derivan del mismo se llama balistocardiografía y se basa en el principio estudiado en los párrafos anteriores. En efecto, durante la fase de sístole el corazón impulsa unos 65 g de sangre por el sistema arterial, principalmente a través de la arteria aorta, desplazando el centro de masas de la sangre impulsada unos 7 cm. Durante la diástole la sangre fluye de nuevo al corazón a través de las venas cava y pulmonares, describiendo así un movimiento aproximadamente oscilatorio con un periodo de unos 0,8 segundos (lo que equivale a un ritmo cardíaco de unas 75 pulsaciones por minuto e implica que el corazón bombea $75 \times 65 \approx 5.000$ gramos de sangre por minuto).

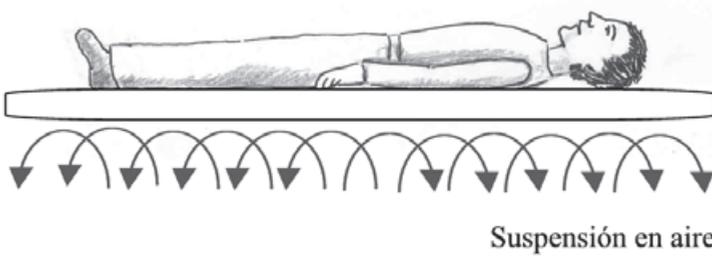


Fig. 2.27. Dispositivo para balistocardiograma.

Supongamos ahora que una persona yace sobre un soporte horizontal que puede moverse sin rozamiento, por ejemplo sobre un flujo de aire. El cuerpo de la persona es como la caja del ejercicio anterior y la sangre juega el papel de masa oscilante en su interior. Puesto que no hay fuerzas externas, la condición de que el centro de masas total permanezca inmóvil implica que el cuerpo de la persona (que suponemos de 70 kg) oscilará para compensar la oscilación de la sangre con el mismo periodo de $0,8$ segundos y una amplitud A_c :

$$A_c = \frac{m}{M} x_0 = \frac{0,065}{70} \times 0,07 = 6,5 \times 10^{-5} \text{ m} = 0,065 \text{ mm} = 65 \mu\text{m}$$

El desplazamiento producido es minúsculo pero observable y separable de vibraciones que proceden del medio debido a que se produce con una frecuencia específica, que es la de la pulsación cardíaca. Un balistocardiograma típico es el de la figura 2.28, en el que puede verse que el desplazamiento es periódico pero sólo aproximadamente sinusoidal.

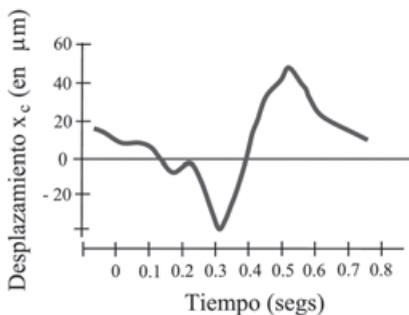


Fig. 2.28. Balistocardiograma: oscilación del cuerpo en posición horizontal por efecto de los latidos del corazón.

A partir del estudio de esa curva puede calcularse, en principio, la masa de sangre bombeada por el corazón en cada contracción, que es una manifestación del funcionamiento del sistema cardiovascular. De todas formas, la interpretación de un balistocardiograma es difícil y debe completarse

con medidas de velocidad y aceleración del movimiento, así como con electrocardiogramas.

El movimiento del centro de masas en sistemas en interacción

Consideremos ahora un cuerpo en el que sus componentes están sometidas no sólo a las fuerzas internas, sino también a fuerzas externas $\vec{F}^{(e)}$. Para el caso de dos partículas, las ecuaciones de Newton se escriben del siguiente modo:

$$\vec{F}_1 = \vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_{21} = m_1 \vec{a}_1$$

$$\vec{F}_2 = \vec{F}_2^{(e)} + \vec{F}_{12} = m_2 \vec{a}_2$$

Sumando ahora estas dos expresiones y recordando la tercera ley de Newton ($\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$), resulta que:

$$\vec{F}^{(e)} = \vec{F}_1^{(e)} + \vec{F}_2^{(e)} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2$$

y recordando, de la definición del centro de masas:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d^2 \vec{r}_{CM}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} (m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2)$$

obtenemos:

$$\vec{F}^{(e)} = M \vec{a}_{CM} = M \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d\vec{P}_{CM}}{dt} \quad (2.20)$$

Es decir, **el centro de masas se mueve con una aceleración igual a la que tendría una partícula que concentrara toda la masa del cuerpo y sobre la que actuara la suma de todas las fuerzas externas.**

***Ejemplo.** Un saltador de longitud, mientras va en carrera hacia la tabla de saltos, interactúa con el suelo a través de sus pies y va acelerando su movimiento. Cuando da el impulso final y despega, no hay más interacciones que las internas, gracias a las que puede mover sus miembros durante el salto, y la gravedad terrestre como única fuerza externa. Así, su centro de masas describe un movimiento parabólico determinado por la velocidad inicial (sus dos componentes, horizontal y vertical), sin que el saltador pueda alterar su movimiento. Los movimientos que realiza durante el vuelo le permiten aprovechar mejor el rozamiento con el aire, por lo que en vacío serían irrelevantes, y también aterrizar en una posición que le permita tocar el foso de saltos con los pies lo más lejos posible del punto de batida, pero no para alterar la trayectoria de su centro de masas.*

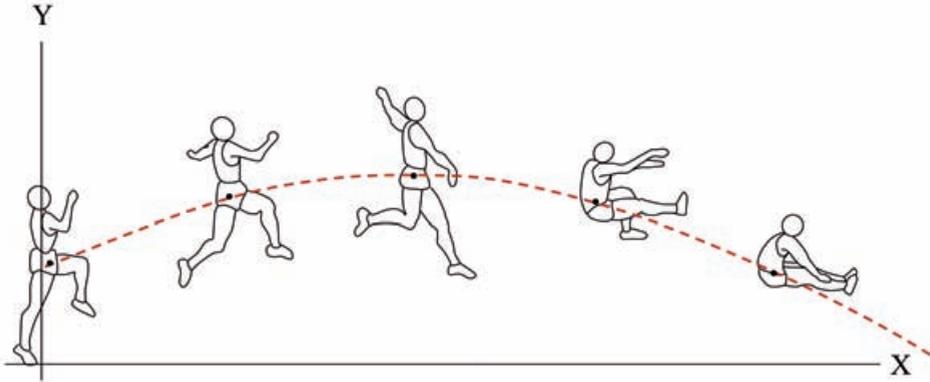


Fig. 2.29. Salto de longitud y movimiento del centro de masas del saltador.

Si un saltador sale de la tabla de batida con una velocidad de 11 m/s y un ángulo de elevación $\alpha = 20^\circ$ (parámetros típicos de Carl Lewis, por ejemplo), el centro de masas, que partiría desde una altura y_0 de aproximadamente un metro en el momento del despegue, llegaría al suelo, tras aplicar la expresión (1.20), a una distancia de unos 10 metros del punto de salida (la mejor marca de Carl Lewis es de 8,87 m, obtenida en 1991, mientras que el récord del mundo lo batió ese mismo año Mike Powell saltando 8,95 m). En este cálculo no se ha tenido en cuenta el rozamiento con el aire, que disminuiría ligeramente la distancia recorrida, ni que el centro de gravedad no llega nunca al suelo, sino que está todavía a una cierta altura cuando los pies impactan sobre el foso de caída. Es también muy fácil calcular la altura máxima durante el salto. En efecto, si la componente vertical de la velocidad es $v_{0y} = v_0 \text{ sen } \alpha \approx 3,76 \text{ m/s}$, la altura máxima sobre el punto de partida será

$$h = \frac{v_{0y}^2}{2g} \approx 0,72 \text{ m}$$

que sumado al metro de altura desde el que se inicia el salto, da para el centro de gravedad del atleta una altura máxima del orden de 1,7 metros.

El choque de un cuerpo contra el suelo

De la ecuación (2.20) puede deducirse que:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{(e)} dt = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{P}_{CM} = \vec{P}_{2,CM} - \vec{P}_{1,CM}$$

donde $\bar{P}_{1,CM}$ y $\bar{P}_{2,CM}$ son, respectivamente, los momentos final e inicial del centro de masas. Considerando movimientos en una dimensión y suprimiendo índices y superíndices, en el bien entendido de que se trata de fuerzas externas totales y momentos del centro de masas del cuerpo sobre el que se aplican esas fuerzas:

$$\int_{t_1}^{t_2} F dt = P_2 - P_1 \quad (2.21)$$

Cuando se producen choques o interacciones de corta duración, se puede aproximar la fuerza que actúa durante el choque por una fuerza promedio aproximadamente constante F_0 . En estas condiciones, podemos integrar la ecuación (2.21) y obtenemos:

$$F_0 \Delta t = P_2 - P_1$$

Consideremos ahora una persona en un ascensor que cae en caída libre debido a que se ha roto el cable de sustentación. Al impactar contra el suelo puede ocurrir que el choque sea elástico y rebote por completo, en cuyo caso el momento de la persona después del choque es igual al que llevaba antes pero cambiado de signo, o que no rebote en absoluto, en cuyo caso el momento final es cero. Tomando como sentido positivo el vertical hacia arriba, que es el de la fuerza F_0 del suelo sobre el cuerpo, P_1 es igual a $-P$, donde P es el módulo del momento incidente y el momento saliente $P_2 = xP$, donde x es un número que varía entre 1 cuando el choque es elástico y 0 cuando el cuerpo no rebota en absoluto. En la aproximación de una fuerza constante durante el tiempo del choque:

$$F_0 \Delta t = xP + P = C \times P = C \times mv \quad (2.22)$$

donde $C = 1 + x$ es una constante que vale 2 para el caso de rebote completo, 1 para el caso de ningún rebote y un valor entre 1 y 2 para todos los casos intermedios, m es la masa y v la velocidad. Si la caída ha sido libre y despreciamos el rozamiento, la velocidad es una función de la altura de caída h :

$$v = \sqrt{2gh}$$

de donde:

$$F_0 = C \frac{mv}{\Delta t} = C \frac{m\sqrt{2gh}}{\Delta t} \quad (2.23)$$

Pongamos algunos números. Si el golpe ha sido seco, contra un suelo duro y manteniendo rígido el cuerpo, el tiempo de choque será muy corto, del orden de unos 5 milisegundos. Si la persona cae desde 20 metros (unos 6 pisos) y pesa 70 kg:

$$F_0 = C \frac{70 \times \sqrt{2 \times 9,8 \times 20}}{0,005} \approx C \times 280.000 \text{ N}$$

Por lo tanto, la fuerza experimentada en el choque varía entre 280.000 *N* y 560.000 *N*, según sea el valor de *C*, es decir, el equivalente a un peso entre 28 y 56 toneladas. Nótese que la velocidad de caída es de unos 20 m/s (71 km/h), por lo que la fuerza calculada es la misma que sufriría el pasajero de un automóvil circulando a esa velocidad en un choque seco, contra un muro de hormigón, por ejemplo. Volviendo al ascensor, si la persona cae de pie rígidamente, la mitad de la fuerza se aplicará a cada una de las dos piernas, específicamente sobre la tibia. El punto más débil de la tibia es el más estrecho, un poco por encima del tobillo, con una sección de unos 3,5 cm², de forma que la fuerza por unidad de sección en ese punto de una de las dos tibias, lo que llamaremos esfuerzo en el capítulo 16, será:

$$\sigma = \frac{F}{S} = C \times \frac{280.000}{2 \times 3,5} = C \times 40.000 \text{ N/cm}^2$$

Pero el esfuerzo de rotura por compresión longitudinal para un hueso es del orden de 16.000 N/cm², entre 2,5 y 5 veces menor que el soportado en el choque, lo que implica que, en estas condiciones, el hueso se fracturará. Si en la parte del suelo donde choca el ascensor hay un amortiguador, como muelles o un material blando, el periodo de tiempo de colisión se prolonga, lo que disminuye la fuerza ejercida durante ese periodo (ver ecuación (2.23)). Así, si la duración del choque se multiplica por diez, la fuerza disminuye en esa misma cantidad y los daños causados son menores. Otra forma de disminuir los daños es aumentar la superficie sobre la que se reparte la fuerza adoptando una posición tendida, aunque entonces puede sufrir la columna o la cabeza, pero el impacto, medido en fuerza por unidad de superficie, es menor.

Cuando una persona cae desde una cierta altura sobre sus pies, el fenómeno es el mismo y las expresiones obtenidas más arriba siguen siendo válidas. Lo que se hace instintivamente, en este caso, para aumentar la duración del impacto y disminuir, en consecuencia, la fuerza soportada, es doblar las rodillas gradualmente de forma que la fuerza se reparta a lo largo del tiempo que media desde que hacemos contacto con el suelo hasta que cesa el movimiento.

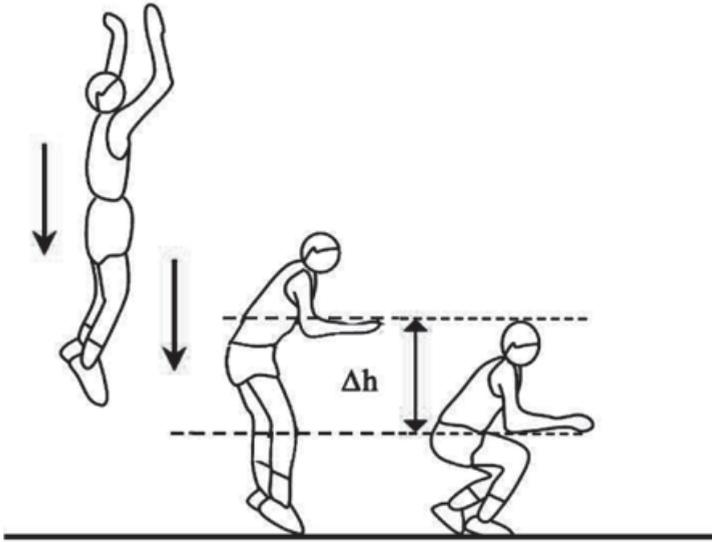


Fig. 2.30. Flexión de piernas en la caída vertical. El intervalo Δh es la distancia de deceleración desde la velocidad de caída hasta la velocidad cero.

Supongamos, entonces, que la persona llega al suelo con una velocidad, v , tras caer desde una altura h . Desde que toca el suelo hasta que queda en reposo hay una deceleración, cuyo promedio es a , generada por los músculos de las piernas al doblarse por las rodillas, que reduce la velocidad de caída desde v hasta cero, teniendo lugar dicha reducción a lo largo de un recorrido Δh , que es la distancia que recorre el centro de gravedad del cuerpo en la fase de frenado. La deceleración será, entonces:

$$a = \frac{v^2}{2\Delta h}$$

y el tiempo que tarda en detenerse es:

$$\Delta t = \frac{v}{a} = \frac{2\Delta h}{v} \quad (2.24)$$

En este caso C es igual a 1 debido a que la persona que cae no rebota, sino que queda inmóvil después del tiempo de frenado. De las ecuaciones (2.23) y (2.24) se sigue que la fuerza media experimentada en el choque es:

$$F_0 = \frac{mv}{\Delta t} = \frac{mv^2}{2\Delta h} \quad (2.25)$$

Ahora podemos sustituir la velocidad de caída en función de la altura h desde la que cae:

$$F_0 = \frac{m \times 2gh}{2\Delta h} = mg \frac{h}{\Delta h}$$

Si el choque se produce con las piernas rígidas, de forma que casi no hay flexión y Δh es muy pequeño (pongamos del orden de 1 cm), entonces podemos calcular la altura a partir de la cual habrá fractura de tibia. Para una persona de 70 kg, tendremos:

$$F_0 = 70 \times 9,8 \times \frac{h}{0,01} = 68.600 \times hN$$

Como la sección mínima de cada tibia es de unos $3,5 \text{ cm}^2$, el esfuerzo es:

$$\sigma = \frac{68.600 \times h}{2 \times 3,5} = 9.800 \times h \text{ N/cm}^2 \quad (2.26)$$

y habrá fractura si esta tensión es superior al límite de rotura por compresión del hueso, que es de unos 16.000 N/cm^2 . Por lo tanto, caídas rígidas a partir de unos dos metros de altura serán suficientes para quebrar la tibia. Flexionar las piernas de forma que la distancia de deceleración sea de 10 o 20 cm sirve para evitar la rotura de huesos a estas alturas y a otras superiores. Lo que ocurre para alturas más grandes es que la deceleración que se necesita es muy grande, lo que implica una tensión en ligamentos y tendones que pueden dañarse con más facilidad que el hueso. Por supuesto que si la caída tiene lugar sobre arena, agua o un suelo blando, la distancia de deceleración aumenta debido al recorrido en el medio absorbente, sin necesidad de tensar los músculos, y la fuerza del impacto es mucho menor, por lo que se puede caer desde alturas muy grandes sin que se produzca ninguna fractura.

Un paracaídas deportivo moderno puede poner al paracaidista en el suelo con una velocidad de unos 3 m/s , que es la velocidad a la que cae en vacío un cuerpo desde medio metro de altura. En estas condiciones, la ecuación (2.25) nos dice que no habrá ningún riesgo de fractura. Los paracaídas militares deben ser diseñados de forma que sean rápidos para que el tiempo pasado en el aire sea lo más corto posible pero, al tiempo, deben permitir aterrizar de forma que no se produzcan daños. La velocidad de llegada en estos casos es de unos $7,5 \text{ m/s}$, que corresponde a una caída libre desde unos 3 m . Los paracaidistas deben, por lo tanto, aprender a caer flexionando y disponiendo su cuerpo de forma que se prolongue al máximo el tiempo de deceleración y se reparta la fuerza del impacto sobre la mayor superficie posible.

Hasta este momento, hemos estado considerando la caída en posición vertical, lo que permite aumentar el tiempo de impacto flexionando las piernas.

Pero si la caída es en posición tendida, la distancia de deceleración sólo puede producirse por la deformación elástica del cuerpo, que es muy pequeña, o por la del suelo si éste es blando. Si la caída se produce en posición tendida, la fuerza del impacto se reparte sobre una superficie mucho mayor. Por ejemplo, la superficie de contacto en la caída de espaldas es de unos 3.500 cm², es decir, unas 1.000 veces igual a la superficie transversal de una tibia. Se ha comprobado que, para choques con el suelo de este tipo, no se producen daños si la fuerza por unidad de superficie es del orden de 20 N/cm² o menor, mientras que hay un 50 por ciento de probabilidades de fallecimiento si este parámetro es de unos 35 N/cm² o mayor.

Estudiemos ahora la caída sobre una superficie blanda, como por ejemplo la nieve, que permite alargar la fase de deceleración y disminuir la violencia del impacto. Cuando un cuerpo cae en el aire, además de la fuerza de gravedad, actúa el rozamiento, que es muy pequeño a bajas velocidades (es decir, poca altura de caída) y por eso no lo hemos considerado hasta ahora. Sin embargo, como veremos en detalle en el siguiente capítulo, a grandes velocidades la fricción puede llegar a ser tan grande que la velocidad de caída se haga constante, con un valor que llamamos velocidad límite. La velocidad límite para una persona en aire al nivel del mar es de unos 55 m/s (200 km/h). De la ecuación (2.25) sabemos que la fuerza por unidad de superficie en un choque es:

$$\sigma = \frac{F_0}{S} = \frac{mv_L^2}{2S\Delta h}$$

donde S es la superficie que recibe el impacto y v_L es la velocidad límite. Para una superficie de 3.500 cm² y una masa de 70 kg:

$$\sigma \approx \frac{30}{\Delta h} \text{ N / cm}^2$$

Lo que quiere decir que si la distancia de amortiguamiento en el suelo es del orden de 1 metro o mayor, estamos en el rango de valores para el que la probabilidad de sobrevivir es del 50 por ciento. Y por sorprendente que parezca el resultado y simple que sea la deducción, los datos empíricos están de acuerdo con esta conclusión. Existen multitud de documentos que testimonian la posibilidad de sobrevivir a una caída desde un avión sin paracaídas, siempre que ésta se produzca sobre nieve profunda y la profundidad del agujero que se hace en la fase de frenado contra el suelo resulta ser del orden de, o algo superior a, un metro.

2.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 2.1 Una persona se encuentra en un bote en reposo sobre el agua y tira una pelota de $0,5 \text{ kg}$ de masa hacia atrás con una velocidad de 4 m/s . Si la masa del bote más la persona es de 120 kg , calcular la velocidad a la que se moverá el bote en sentido contrario a la pelota si no hubiera rozamiento.

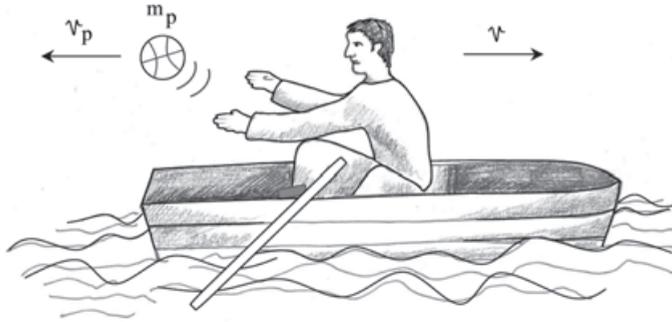


Fig. 2.31. Al lanzar un objeto en una dirección, el resto del sistema (bote, persona, objeto, etc.), inicialmente en reposo, retrocede en la dirección contraria debido a la conservación del momento.

Sol.: $v = 1,7 \text{ cm/s}$

Ejercicio 2.2 Desde un avión se lanza una granada en dirección horizontal con una velocidad de 100 m/s . La granada estalla a los 20 s de haber sido lanzada, dividiéndose en dos trozos, de masas 1 kg y $1,5 \text{ kg}$. El fragmento mayor sale despedido según la dirección horizontal con una velocidad de 250 m/s . Calcular la velocidad y dirección del otro fragmento.

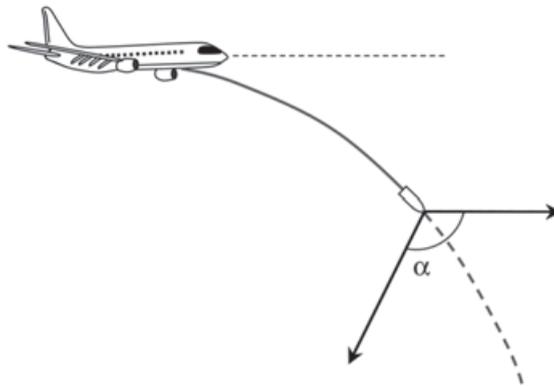


Fig. 2.32. Un avión lanza una bomba que se fragmenta en vuelo.

Sol.: $\vec{v} = (-125, -500) \text{ m/s}$; $v = 515 \text{ m/s}$; $\alpha = -104^\circ$

Ejercicio 2.3 *Un proyectil llega al punto de máxima altura con una velocidad de 100 m/s y en ese punto explota y se divide en dos fragmentos de igual masa, uno de los cuales sale en dirección vertical con una velocidad también de 100 m/s. Calcular el módulo de la velocidad y la dirección en la que sale el otro fragmento.*

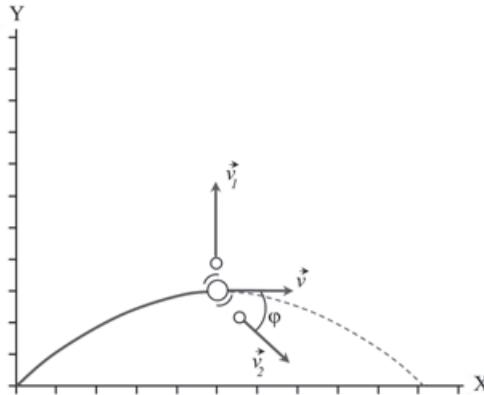


Fig. 2.33 Fragmentación de un proyectil cuando se encuentra en el máximo de su trayectoria parabólica.

Sol.: $v_2 = 223,6 \text{ m/s}$; $\varphi = -26,5^\circ$

Ejercicio 2.4 *Dos bolas de masas $m_1 = 5 \text{ kg}$ y $m_2 = 10 \text{ kg}$ se mueven hacia el origen de coordenadas con velocidades constantes $v_1 = 10 \text{ m/s}$ y v_2 , respectivamente, según se indica en la figura 2.34. Tras el choque, que se produce en el origen, la bola de masa m_2 queda en reposo y la de masa m_1 se mueve con la misma velocidad incidente v_1 en valor absoluto, pero en la dirección indicada en la figura. Calcular v_2 en función de m_1, m_2, v_1 y el ángulo de incidencia α . Dar el valor de v_2 para el caso $\alpha = 30^\circ$.*

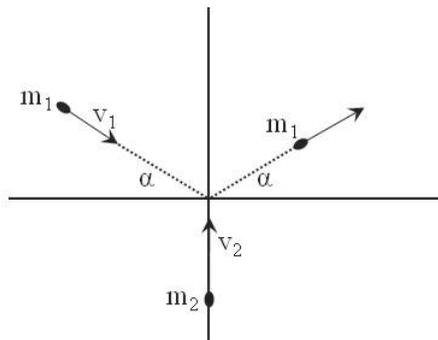


Fig. 2.34. Choque elástico.

Sol.: $v_2 = \frac{2m_1v_1\text{sen}\alpha}{m_2} = 5 \text{ m/s}$

Ejercicio 2.5 *Dos carneros corren a la misma velocidad constante de 20 m/s sobre una misma línea recta en sentidos opuestos, acercándose, hasta que chocan. Tras el choque ambos carneros quedan enredados, de modo que se mueven juntos. Si la masa de uno de ellos es un 50 % mayor que la del otro, y suponiendo que no hay rozamiento, ¿a qué velocidad se mueven ambos después del choque?*

Sol.: $v = 4 \text{ m/s}$

Ejercicio 2.6 *Un coche rueda en punto muerto a 36 km/h por una carretera horizontal sin rozamiento. En sentido contrario vuela un enjambre de moscas a una velocidad de 20 m/s. Si la masa del coche es de 1000 kg y la de cada mosca 0,1 g, ¿cuántas moscas deben estrellarse contra el coche para que éste se pare?*

Sol.: 5×10^6

Ejercicio 2.7 *Una almeja de 20 g de masa, inicialmente en reposo, primero aspira y luego expulsa por el sifón 2,0 g de agua a una velocidad de 0,5 m/s. ¿Con qué velocidad se mueve la almeja?*

Sol.: $v = 5,0 \text{ cm/s}$

Ejercicio 2.8 *Un balón de masa 5,0 kg se mueve horizontalmente a velocidad constante de 50 m/s y rebota contra el poste de una portería de fútbol. Tras el rebote, el balón se mueve en sentido opuesto con la misma velocidad. Suponiendo que la fuerza ejercida por el poste sobre el balón es de 1.000 N, constante durante el tiempo que dura el choque, ¿cuánto tiempo ha durado éste?*

Sol.: $t = 50 \text{ ms}$

Ejercicio 2.9 *En un encierro, un toro de 450 kg corriendo a 40 km/h embiste a un mozo de 70 kg que huye delante del toro a una velocidad de 20 km/h. Tras la embestida, el toro sigue moviéndose a una velocidad de 30 km/h en la misma dirección. ¿A qué velocidad ha salido despedido el mozo?*

Sol.: $v = 84 \text{ km/h}$

Ejercicio 2.10 *Calculemos el centro de masas de un triángulo rectángulo homogéneo. Se trata de un sistema en dos dimensiones, así que tomaremos como ejes X e Y dos ejes perpendiculares contenidos en el plano del triángulo coincidiendo con sus dos lados perpendiculares, como puede verse en la figura.*

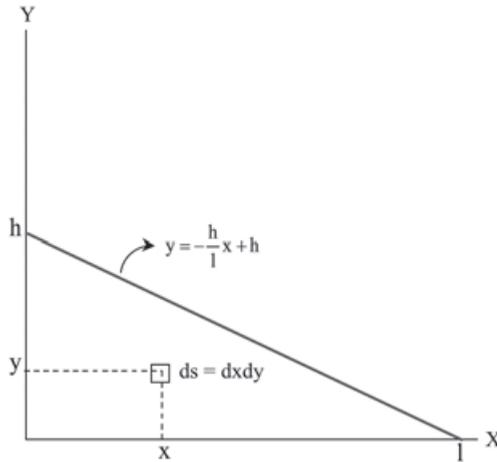


Fig. 2.35. Triángulo rectángulo de densidad uniforme cuyos catetos tienen una longitud h y l .

El elemento de superficie será $dS = dxdy$, y si σ es la densidad superficial, entonces la masa de dicho elemento será $dm = \sigma dxdy$. La masa total del triángulo será igual a su área por la densidad superficial:

$$M = \sigma \times \frac{1}{2}lh$$

Las coordenadas del centro de masas serán:

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \iint xdm = \frac{\sigma}{M} \iint x dxdy$$

$$y_{CM} = \frac{1}{M} \iint ydm = \frac{\sigma}{M} \iint y dxdy$$

donde la integral se extiende al triángulo en cuestión. La variable x va desde 0 a l , mientras que, para cada valor de x , la variable y va desde 0 hasta la hipotenusa del triángulo. La ecuación de la hipotenusa es:

$$y = -\frac{h}{l}x + h$$

por lo tanto, para las coordenadas del centro de masas tenemos:

$$x_{CM} = \frac{\sigma}{M} \int_0^l x dx \int_0^{-\frac{h}{l}x+h} dy = \frac{\sigma}{M} \int_0^l x dx \left[-\frac{h}{l}x + h \right] = \frac{\sigma}{M} \left[-\frac{hl^2}{3} + \frac{hl^2}{2} \right]$$

$$x_{CM} = \frac{\sigma h l^2}{6} = \frac{1}{3} l$$

$$y_{CM} = \frac{\sigma}{M} \int_0^l dx \int_0^{-\frac{h}{l}x+h} y dy = \frac{\sigma}{M} \int_0^l dx \frac{1}{2} \left[-\frac{h}{l}x + h \right]^2 = \frac{\sigma}{2M} \left[\frac{h^2 l}{3} - \frac{h^2 l}{2} + h^2 l \right]$$

$$y_{CM} = \frac{\sigma h^2 l}{6} = \frac{1}{3} h$$

Ejercicio 2.11 Consideremos un modelo simplificado del cuerpo humano formado por segmentos cilíndricos como los de la figura 2.36, en la que se indican, además, el porcentaje de la masa corporal de cada uno de ellos y sus dimensiones.

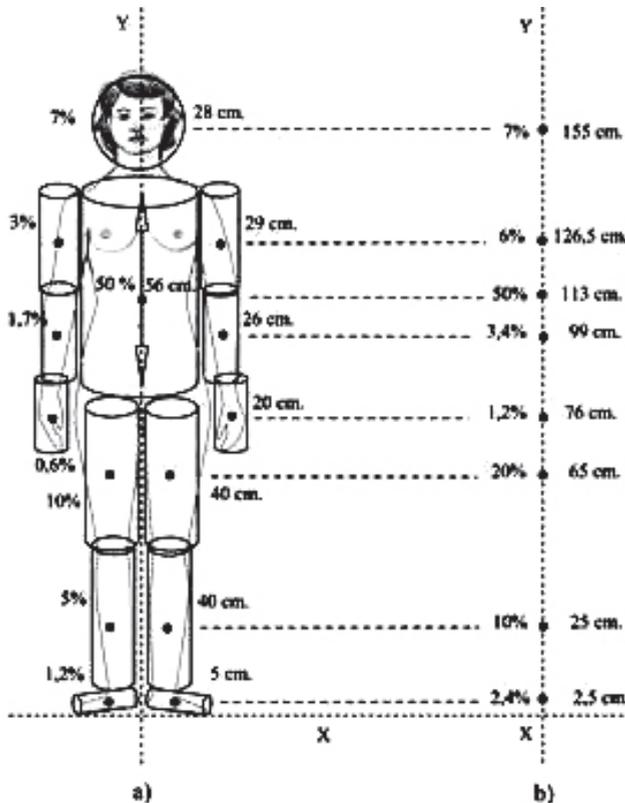


Fig. 2.36. a) Esquema aproximado de la distribución de masas en un cuerpo humano cuyo tronco y extremidades se aproximan por medio de cilindros. La masa está dada en porcentaje de la masa total. b) Situación de los centros de masas de la cabeza, tronco y pares de extremidades. Se da la altura sobre el suelo y el porcentaje de la masa total que representa cada uno de esos puntos.

El centro de masas de cada segmento estará en su centro geométrico, por lo que pueden sustituirse por masas puntuales con la masa de cada uno de ellos situada en su centro de masas, de acuerdo con la figura 2.36. Además, todo es simétrico respecto del eje Y, por lo que el centro de masas de cada par de segmentos laterales está en dicho eje. Calcular la altura a la que se encuentra el centro de masas del cuerpo.

Sol.: $y_{CM} \approx 95 \text{ cm}$

Ejercicio 2.12 Una rana de 50 g de masa se encuentra sobre el extremo de una tabla de madera de 1 kg de peso y 2 m de longitud que está flotando sobre la superficie de un lago. La rana salta con velocidad v_0 formando un ángulo de 30° con la horizontal. Suponiendo que el rozamiento entre la madera y el agua es despreciable y que el movimiento vertical de la madera es absorbido por el agua, calcular la velocidad v_0 para que la rana caiga sobre el otro extremo de la tabla.

(Tómese como origen de coordenadas el extremo en el que se encontraba inicialmente la rana y, para empezar, calcúlese la velocidad con que la tabla retrocede en función de v_0)

Sol.: $4,6 \text{ m/s} \simeq 17 \text{ km/h}$

Ejercicio 2.13 Se dispara un proyectil de 20 g sobre un bloque de madera de 10 kg y el conjunto desliza sobre una superficie sin rozamiento recorriendo 10 kg en 3 s. Calcular la velocidad del proyectil.

Sol.: $v = 334 \text{ m/s}$

Ejercicio 2.14 Se conoce con el nombre de carro de Newton al dispositivo de la figura 2.37.

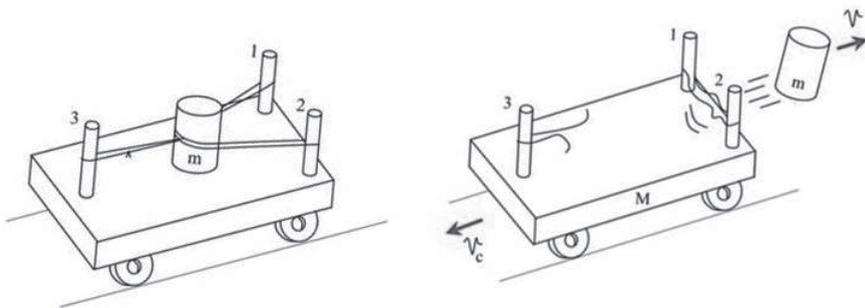


Fig. 2.37. Carro de Newton.

La goma elástica está sujeta a los tornillos 1 y 2, y se mantiene en posición extendida gracias a un hilo sujeto al tornillo 3 que impide que se encoja hasta

la longitud de equilibrio. Si se quema el hilo con una cerilla, o se corta, la goma impulsa al peso que hay sobre el carro y éste se mueve en dirección contraria a la del movimiento del peso. Como veremos en el capítulo dedicado a las oscilaciones, la velocidad que la goma imprime a la masa m es proporcional al inverso de \sqrt{m} . Si al lanzar una carga de 10 g el carro se mueve en la dirección contraria a una velocidad de 10 cm/s, ¿a qué velocidad se moverá si se lanza una carga de 30 g?

Sol.: $v = 17,3 \text{ cm/s}$

Ejercicio 2.15 Un automóvil cuya masa es de 1.000 kg circula a 60 km/h y choca contra un poste, desplazándolo 10 cm antes de pararse. Calcular la fuerza que actúa sobre el automóvil y el tiempo durante el que actúa.

Sol.: $F = 1,4 \times 10^6 \text{ N}$; $\Delta t = 0,012 \text{ s}$

Ejercicio 2.16 Una persona cae desde 4 m de altura. Al llegar al suelo flexiona las rodillas para decelerar su movimiento hasta el reposo. La longitud a lo largo de la cual se produce el frenado es de 50 cm. Si la masa del cuerpo, m , es de 70 kg y la del tronco (incluidos la cabeza y los brazos) es de 50 kg, calcular la fuerza que ejercen las piernas sobre el tronco durante la deceleración y expresarla en unidades del peso de la persona. Si en la caída la persona hubiera mantenido las piernas rígidas, la distancia de frenado sería simplemente la contracción de los tejidos elásticos de las piernas, de un centímetro aproximadamente. Calcular también la fuerza ejercida sobre el tronco en este segundo caso.

Sol.: 1) $F = 3.920 \text{ N} = 5,7 \times mg$; 2) $F = 196.000 \text{ N} = 285 \times mg$

Ejercicio 2.17 Un proyectil de 10 g que se mueve a 800 m/s penetra en un bloque de madera de 25 kg y se detiene después de haber recorrido 20 cm en el bloque. Calcular la velocidad con la que se mueve el bloque después del impacto, el tiempo que ha transcurrido desde que el proyectil toca la madera hasta que se detiene y la fuerza que ejerce durante el impacto.

Sol.: 1) $v = 0,32 \text{ m/s}$; 2) $\Delta t = 5 \times 10^{-4} \text{ s}$; 3) $F = 16.000 \text{ N}$

2.5 Referencias

Aguilar Gutiérrez, M.: *Biomecánica: la Física y la Biología*. CSIC, 2000

Alberts, B. et al.: *Muscle Contraction: Sliding Filaments*. <http://www.garlandscience.com/ECB/about.html>

Alexander, R. McN. *Locomotion of Animals*. Blackie, 1982

Andersen, J. L., Schjerling, P. & Saltin, B. "Muscle, Genes and Athletic Performance". *Scientific American*, Sept., 2000

Benedek, G. B. & Villars, F. M. H. *Physics with illustrative examples from Medicine and Biology*. Addison Wesley, 1973

Huxley, H. E. "The mechanism of muscular control". *Science*, **164** (1969) 1357

NASA: *A teacher's guide with activities in science, mathematics and technology*, 1999

Piazzesi, G. *et al.* "Mechanism of force generation by myosin heads in skeletal muscle". *Nature* **415** (2002) 659

Randall, D., Burggren, W. & French, K. *Fisiología Animal*. McGraw-Hill, 1998

Thibodeau, G. A. & Patton, K. T.: *Estructura y Función del Cuerpo Humano*, Harcourt Brace, 1998

Capítulo 3. Fuerzas elementales y derivadas. Entornos con fricción

Llamamos fuerzas elementales a aquellas que se derivan de alguna propiedad dinámica de los cuerpos, como por ejemplo la carga eléctrica o la masa, y están presentes en las interacciones entre partículas elementales, aunque, en algunos casos, sus efectos son acumulativos, se manifiestan de forma directa o indirecta a cualquier escala, y son independientes entre sí. En realidad existen muy pocas fuerzas elementales en la naturaleza. Tal y como se menciona en la Introducción, no hay más que cuatro fuerzas asociadas a interacciones elementales, y dos de ellas, las llamadas interacciones nucleares débil y fuerte, sólo se manifiestan a escalas comparables o menores que el tamaño de los núcleos atómicos, es decir, 10^{-15} m.

Las dos únicas fuerzas elementales que actúan a cualquier distancia y que, por consiguiente, son perceptibles sin ayuda de instrumentos sofisticados, se conocen desde la Antigüedad y su presencia es evidente en las propiedades de los objetos de la vida cotidiana. **Estas dos fuerzas son la gravitación y el electromagnetismo**, que comprende la electricidad y el magnetismo, consideradas fuerzas independientes hasta el siglo XIX. De las dos, la gravitación es la más débil, por lo que, en general, su papel es insignificante en comparación con el del electromagnetismo. Así, por ejemplo, todas las propiedades de los objetos, su carácter sólido, líquido o gaseoso, su conductividad térmica o eléctrica, su dureza, su transparencia, su calor específico, etc., dependen exclusivamente de la interacción electromagnética entre sus átomos y moléculas. Dicha interacción será estudiada con detenimiento más adelante. Existen, sin embargo, determinadas situaciones en las que la acumulación de multitud de interacciones gravitatorias elementales, y la cancelación de las electromagnéticas por compensación de cargas positivas y negativas, resulta en efectos visibles achacables únicamente a la gravitación, y eso es lo que ocurre con los cuerpos celestes, incluida la Tierra, debido a que tienen masas muy grandes y carga prácticamente cero. Uno de sus efectos es, por ejemplo, la caída de los cuerpos sobre la superficie terrestre o el mantenimiento de los seres vivos en

contacto con dicha superficie. En este capítulo estudiaremos algunas propiedades de la fuerza gravitatoria.

Las fuerzas derivadas resultan, por su parte, de superponer fuerzas elementales entre la multitud de partículas que componen los cuerpos macroscópicos, apareciendo como fuerzas efectivas, aplicadas a dichos cuerpos y con propiedades muy simples. Ejemplos sencillos de fuerzas derivadas son el rozamiento, la fuerza elástica que ejerce un muelle sobre un cuerpo al que esté fijado, las fuerzas de contacto entre cuerpos sólidos, etc. En todos estos casos, las fuerzas son la resultante de multitud de interacciones entre los átomos y las moléculas de los cuerpos que intervienen, siempre de naturaleza electromagnética.

3.1 La gravitación

3.1.1 La fuerza gravitatoria

La gravitación es una interacción que genera y experimenta cualquier cuerpo. En realidad, la gravitación afecta a cualquier forma de masa o de energía, pero su estudio, con este grado de generalidad, sólo es posible en el marco de la Relatividad General de Einstein. Nos restringiremos, por tanto, a la fuerza gravitatoria entre masas.

Dos cuerpos cualesquiera ejercen siempre una interacción atractiva entre sí, observándose que la fuerza entre ellos es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa.

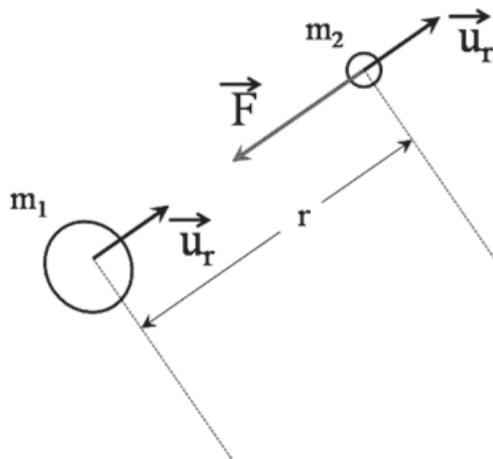


Fig. 3.1. Fuerza gravitatoria entre dos cuerpos. La fuerza \vec{F} es la que ejerce el cuerpo 1 sobre el 2.

Es decir, la fuerza que ejerce la partícula 1 sobre la 2, según se representa en la figura 3.1, tiene la forma:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \vec{u}_r \quad (3.1)$$

Donde m_1 y m_2 son las masas de los dos cuerpos, r es la distancia entre ellos y \vec{u}_r es el vector unitario que va en la dirección de la recta que une a los cuerpos. El signo menos indica el carácter atractivo de la fuerza, dirigida en dirección contraria a \vec{u}_r . G es, por su parte, una constante, llamada constante de Newton, que debe determinarse experimentalmente. La partícula 1, por su parte, experimenta una fuerza debida a la presencia de la partícula 2, que es igual y de sentido contrario a \vec{F} .

Los cuerpos puntuales no existen, son sólo una idealización de los cuerpos reales, que tienen extensión. Pero, a partir de la expresión (3.1), puede calcularse la forma de la fuerza gravitatoria para cuerpos extensos. En particular, para cuerpos esféricos homogéneos puede demostrarse que la fuerza que generan sobre cualquier objeto exterior es la misma que la que generaría una partícula puntual con toda su masa concentrada en el centro de la esfera.

Así que la verificación experimental de las propiedades de la fuerza gravitatoria se hace con facilidad con ayuda de cuerpos esféricos como la Tierra. En efecto, **un cuerpo situado por encima de la superficie terrestre experimenta una fuerza de atracción generada por las interacciones gravitatorias de todas las partículas que componen la Tierra cuyo resultado es el mismo que si toda la masa terrestre estuviera concentrada en su centro.** Así, si el cuerpo se encuentra sobre la superficie, o a una distancia de la misma pequeña en comparación con el radio de la Tierra, de forma que la distancia al centro se pueda aproximar por dicho radio, la fuerza que experimenta será:

$$\vec{F} = -G \frac{m_T m}{R_T} \vec{u}_r$$

donde m_T y R_T son la masa y el radio de la Tierra y m es la masa del cuerpo. La fuerza apuntará hacia el centro del planeta, es decir, en dirección perpendicular a su superficie. Aplicando ahora la segunda ley de Newton y llamando g a la aceleración que adquiere el cuerpo por efecto de dicha fuerza, tendremos:

$$G \frac{m_T m}{R_T^2} = mg$$

de donde se puede despejar g :

$$g = G \frac{m_T}{R_T^2} \quad (3.2)$$

De esta expresión se puede obtener el valor de la constante de Newton G (también llamada constante de la gravitación universal). Como la Tierra es una esfera, su volumen será $\frac{4}{3}\pi R_T^3$ y, como la masa es igual al volumen por la densidad, resulta:

$$g = \frac{4}{3}\pi G R_T \rho_T \quad (3.3)$$

Poniendo ahora los valores encontrados experimentalmente, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, $R_T = 6.370 \text{ km}$ y ρ_T igual a unas 5,5 veces la densidad del agua, es decir unos 5.500 kg/m^3 , encontramos para G el valor:

$$G \approx 6,67 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

donde las dimensiones pueden calcularse a partir de la fórmula (3.1).

La constante G expresa la intensidad de la interacción gravitatoria, por lo que la pequeñez del valor obtenido nos está indicando la extrema debilidad de dicha interacción. De acuerdo con la ecuación (3.1), **dos cuerpos de un kilogramo de masa, situados a una distancia de un metro, se atraen mutuamente con una fuerza de tan sólo $6,67 \times 10^{-11} \text{ N}$** (que es el peso de un cuerpo de $0,68 \times 10^{-11} \text{ kg}$, por ejemplo de una **minúscula** gota de agua de $0,02 \text{ mm}$ de diámetro). En consecuencia, la observación directa de la interacción gravitatoria entre cuerpos cuya masa sea de unos pocos gramos o kilogramos es muy difícil. Aun así, Cavendish logró, en 1798, verificar la ecuación (3.1) utilizando esferas de plomo cuya minúscula atracción era capaz de detectar mediante una balanza de torsión.

Así, la expresión de la fuerza de Newton (3.1) permite obtener, a partir de mediciones sobre la superficie terrestre, como por ejemplo estudiando el movimiento de un cuerpo en caída libre o el de un péndulo, una constante que caracteriza las fuerzas entre cualquier clase de cuerpos, en particular los astros, permitiendo relacionar la mecánica celeste con las trayectorias de los cuerpos sobre la Tierra.

Por ejemplo, si consideramos un astro esférico de radio R_A y densidad ρ_A , la aceleración de la gravedad sobre su superficie tiene una forma similar a la de la expresión (3.3):

$$g_A = \frac{4}{3} \pi G R_A \rho_A$$

y dividiéndola ahora por la (3.3), obtenemos:

$$g_A = \frac{R_A \rho_A}{R_T \rho_T} g$$

que nos da la relación entre la gravedad sobre la Tierra, g , y la que hay sobre cualquier otro cuerpo esférico, independientemente del valor de G . Por ejemplo, para Fobos, que es uno de los dos minúsculos satélites de Marte, apenas una roca de unos 6 km de radio y con una densidad del doble de la de la Tierra, resulta que la aceleración de la gravedad sobre su superficie es de unos 2 cm/s^2 (un cuerpo que se deja caer desde una altura de 10 metros sobre la superficie de Fobos tardaría más de medio minuto en llegar al suelo). En el otro extremo se encuentran las estrellas de neutrones, que son objetos con la masa del Sol contenida en una esfera de unos 10 km de radio, lo que da la inimaginable densidad de cien billones de veces la densidad de la Tierra y produce una aceleración de la gravedad sobre su superficie de un billón de metros por segundo al cuadrado (un cuerpo tardaría millonésimas de segundo en caer sobre su superficie desde 10 metros de altura).

Otra consecuencia importante de (3.3) es que **la aceleración de la gravedad sobre la Tierra es independiente de la naturaleza de los cuerpos que caen, en particular de su masa o de su densidad**. Este es un resultado aparentemente contrario a la experiencia cotidiana, ya que un papel cae mucho más despacio que una moneda. Pero esa diferencia se debe al rozamiento con el aire, que afecta de modo muy distinto a ambos cuerpos. Si hacemos esa misma experiencia en vacío, se puede comprobar que ambos objetos caen al mismo tiempo.

3.1.2 Las trayectorias que se derivan de la gravitación

Se puede demostrar que un cuerpo sujeto a la fuerza gravitatoria describe una trayectoria que es una cónica en la que el centro de atracción ocupa uno de sus focos. Para el caso de un sistema finito o ligado, es decir, que no se pueda alejar indefinidamente del centro de atracción, como es el caso de los planetas alrededor del Sol o de cualquier cuerpo orbitando la Tierra, la única cónica que cumple esta condición es la elipse, así que las órbitas son elipses o una circunferencia, que es el caso particular de elipse sin ninguna excentricidad. Para el caso de un sistema infinito, asintóticamente libre, por ejemplo un cuerpo celeste que pasa por las cercanías del Sol y la fuerza gravitatoria de éste modifica su trayectoria pero no lo atrapa, la cónica en cuestión es una hipérbola.

Observación. Trayectorias aproximadas sobre la superficie de la Tierra. Un cuerpo moviéndose en el campo gravitatorio de la Tierra describe, tal y como hemos dicho, una elipse alrededor de su centro. Sin embargo, en el capítulo 1 hemos demostrado que las trayectorias de los cuerpos cayendo en la gravedad terrestre son parábolas. En realidad, se trata de una aproximación para movimientos cuyas dimensiones son mucho más pequeñas que el radio de la Tierra, en cuyo caso se puede considerar que ésta es plana y la aceleración de la gravedad constante y perpendicular a dicha superficie en todos los puntos de la trayectoria. Como puede verse en la figura 3.2, las parábolas son aproximaciones a arcos pequeños de elipses en uno de cuyos focos está el centro de la Tierra. Para alcances y alturas de metros, kilómetros o, incluso, centenas de kilómetros, esa aproximación es muy precisa.

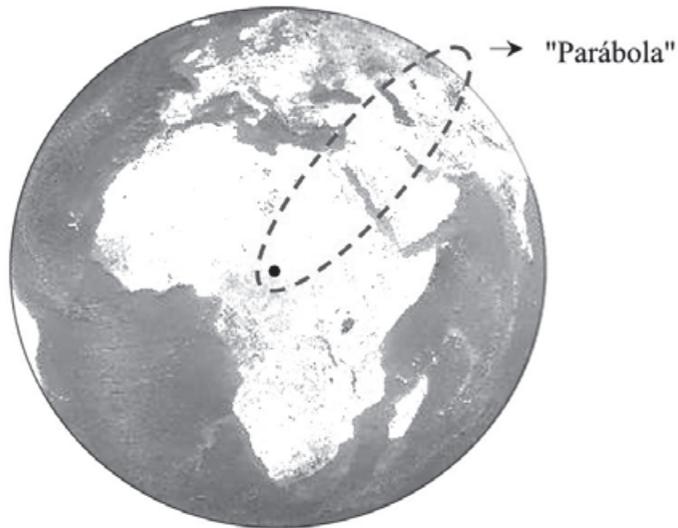


Fig. 3.2. El arco de elipse que recorre un cuerpo que se mueve bajo la acción de la gravedad terrestre se puede aproximar por una parábola si las dimensiones de ésta son pequeñas en comparación con el radio de la Tierra. En estas condiciones, la superficie de la Tierra sobre la que se mueve el cuerpo se puede aproximar por un plano, y la aceleración de la gravedad es aproximadamente normal a dicha superficie plana e independiente de la altura.

Observación. Las leyes de Kepler. Johannes Kepler (1571-1630) consiguió interpretar todos los datos astronómicos existentes en su época sobre el movimiento de los planetas, en el contexto del modelo heliocéntrico del Sistema Solar (heliocéntrico quiere decir que el Sol está en el centro) de Copérnico, llegando en 1609 a resumirlos mediante las tres leyes que llevan su nombre. La primera consiste, sencillamente, en afirmar que **las órbitas de los planetas son elipses en uno de cuyos focos está situado el Sol**. La segunda establece que dichos cuerpos se mueven a lo largo de sus trayectorias elípticas de forma

tal que **el área barrida por la recta que los une al Sol por unidad de tiempo es constante**; o dicho de otra forma, que la velocidad areolar (área barrida por unidad de tiempo) es constante. La tercera ley afirma que **el cuadrado del periodo de rotación de un planeta alrededor del Sol es proporcional al cubo de la distancia media entre ambos astros**.

La primera y la tercera ley se derivan de la forma específica de la fuerza de la gravitación mientras que la segunda es consecuencia simplemente de que es una fuerza central, es decir, dirigida según la dirección de la línea que une el Sol y el planeta. Las leyes de Kepler abrieron el camino al descubrimiento de la gravitación universal por Newton.

Las elipses que describen los planetas que giran alrededor del Sol son muy poco excéntricas, prácticamente circunferencias, mientras que los cometas siguen trayectorias muy alargadas, tales que en algunas de sus posiciones pasan cerca del Sol, que es justo cuando brillan y son visibles, y en otros están sumamente alejados y no pueden verse.

Observación. La longitud de las estaciones. La elipse que describe la Tierra es muy poco excéntrica. Si llamamos Unidad Astronómica (UA) a la distancia media entre la Tierra y el Sol, igual a 150 millones de km, la longitud del semieje mayor de la elipse (distancia máxima entre la Tierra y el Sol) es de 1,0167 UA y la del semieje menor (distancia mínima entre la Tierra y el Sol) es de 0,9833. Como se ve, las desviaciones son de apenas un 1,67 por ciento respecto de la distancia media.

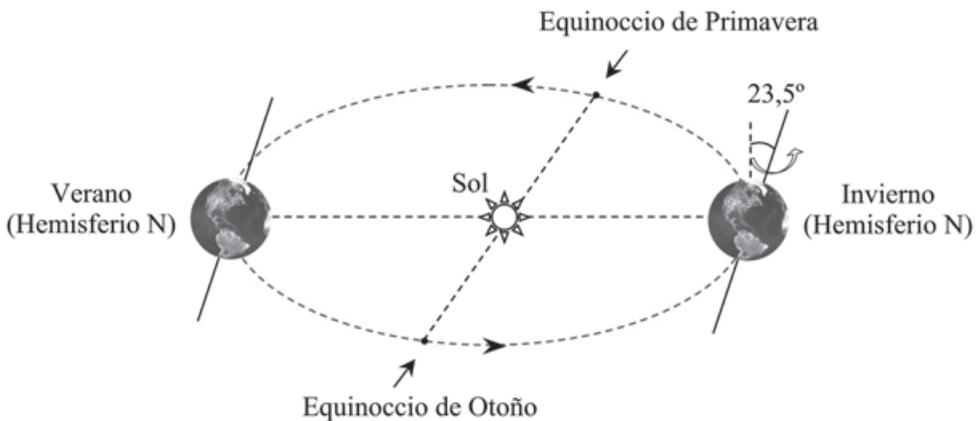


Fig. 3.3. La Tierra describe una elipse muy poco excéntrica alrededor del Sol, que ocupa uno de sus focos. La distancia máxima se produce cuando el hemisferio norte está en verano debido a que, en esa posición, los rayos solares inciden perpendicularmente sobre dicho hemisferio. La distancia mínima ocurre cuando ese mismo hemisferio está en invierno. El eje de rotación de la Tierra alrededor de sí misma forma un ángulo de $23,5^\circ$ con la perpendicular al plano que contiene la órbita terrestre.

La pequeñez de la excentricidad de la órbita hace que las variaciones en la distancia al Sol no influyan demasiado en las estaciones. Como es sabido, las estaciones dependen de la inclinación del eje de rotación de la Tierra respecto de la dirección de llegada de los rayos del Sol. Es verano en un lugar de la superficie terrestre cuando los rayos del Sol inciden perpendicularmente e invierno cuando inciden de forma más oblicua. Justamente, el verano del hemisferio norte ocurre, en estos momentos, cuando la Tierra se encuentra más alejada del Sol, aunque ocurrirá lo contrario dentro de 13.000 años, cuando el eje de rotación de la Tierra, que gira, a su vez, como el eje de una peonza en lo que se llama movimiento de precesión de los equinoccios, haya completado media vuelta y la perpendicularidad de los rayos del Sol sobre el hemisferio norte ocurra cuando la Tierra esté en la parte más cercana al Sol.

De todas formas, la excentricidad de la órbita se manifiesta en que la duración de la primavera y el verano (intervalo de tiempo transcurrido entre el paso por el equinoccio de primavera y por el de otoño) es seis días mayor que la del otoño y el invierno.

3.1.3 Caída libre e ingravidez

Un cuerpo abandonado desde el reposo en un campo gravitatorio constante, como el de la Tierra en las cercanías de su superficie, cae con un movimiento uniformemente acelerado. El hecho de que la aceleración con que cae sea independiente de la naturaleza del cuerpo implica, como ya hemos visto, que todos caigan al mismo tiempo. Si pensamos en una persona que cae en el vacío junto con otros objetos, durante el tiempo de caída tendrá la impresión de que esos objetos continúan en reposo si así lo estaban al iniciarse la caída, o bien siguen moviéndose con una cierta velocidad relativa respecto de la persona si ése era su estado inicial.

Los efectos de la gravedad, uniforme en este caso, son contrarrestados exactamente por el movimiento uniformemente acelerado, de forma que el comportamiento relativo de los cuerpos al moverse todos con la misma aceleración es el de cuerpos no sometidos a fuerza de gravedad alguna. Este fenómeno es el que se conoce con el nombre de ingravidez. Como la fuerza de la gravedad es la misma también para todas las partes del cuerpo y éstas se mueven con la misma aceleración, la ingravidez no es sólo respecto de todos los otros objetos moviéndose al unísono, sino también un efecto, y una sensación, sobre el propio cuerpo. Así, **un conjunto de objetos cayendo libremente dentro de un ascensor que también cae por efecto de la gravedad terrestre se comportan como si no actuara sobre ellos la fuerza de la gravedad. Recíprocamente, en ausencia de gravedad, un movimiento uniformemente acelerado produce efectos indistinguibles de**

los que produce un campo gravitatorio constante. Así, en un lugar infinitamente alejado de todos los cuerpos y, por consiguiente, no sujeto a fuerza gravitatoria alguna, si una persona y su entorno están dentro de un ascensor y éste se mueve en una cierta dirección con una aceleración constante de $9,8 \text{ m/s}^2$, los fenómenos físicos serán indistinguibles de los generados por el campo gravitatorio terrestre en dirección contraria a la del movimiento. Por ejemplo, sentirá en los pies una fuerza exactamente igual a la que se siente estando en reposo pero sujeto a la acción de la gravedad.

Observación. Relatividad general. Esta reflexión, de una gran profundidad conceptual, fue la base sobre la que Einstein construyó su teoría de la Relatividad General, que es una teoría de la gravitación en la que se relaciona a ésta con las propiedades geométricas del espacio-tiempo.

La ingravidez, por lo tanto, no se produce sólo en ausencia de toda interacción gravitatoria, sino también cuando existe gravedad y ésta está compensada exactamente por el movimiento en caída libre. Pero caída libre no es sólo el movimiento vertical hacia abajo que se produce cuando la velocidad inicial es cero o en dirección vertical. Si la velocidad inicial tiene una cierta componente horizontal, ya sabemos que el movimiento es parabólico, y también independiente de la naturaleza del cuerpo. **Un conjunto de objetos lanzados con la misma velocidad inicial sobre la superficie terrestre se mueven todos según la misma trayectoria parabólica, que es, en este caso, la de caída libre, y experimentan también la sensación de ingravidez.**

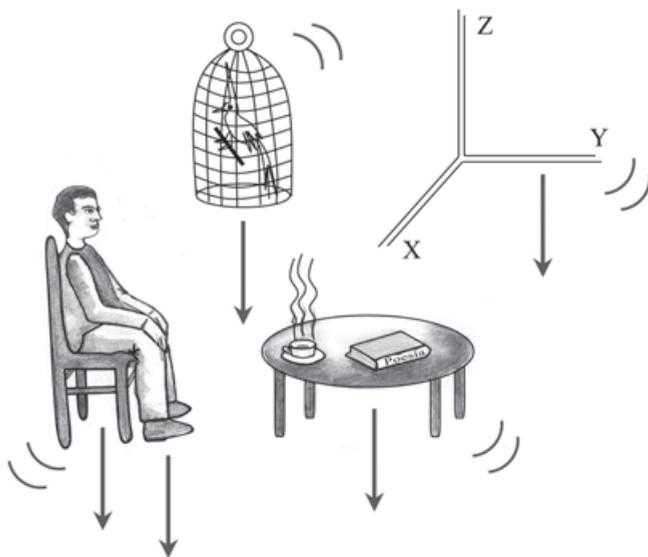


Fig. 3.4. Los objetos sometidos a un campo gravitatorio se comportan como si fueran libres (ingrávidos) en un sistema de referencia no inercial que se mueve con una aceleración igual a la inducida por el campo gravitatorio.

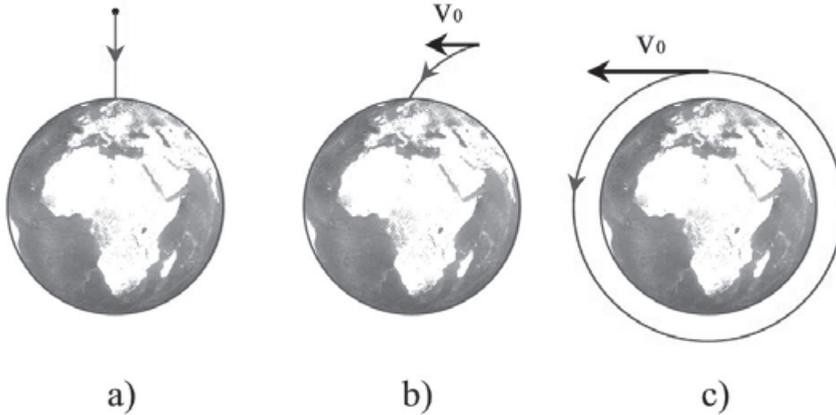


Fig. 3.5. Caída libre. a) Con velocidad horizontal inicial cero. b) Con velocidad horizontal inicial moderada. c) Con velocidad horizontal inicial grande.

Si la componente horizontal de la velocidad inicial es muy grande puede ocurrir que el objeto no llegue a caer sobre la superficie de la Tierra y, si se encuentra fuera de la atmósfera y no experimenta el rozamiento del aire, permanezca indefinidamente en órbita. Pero se trata de nuevo de un movimiento en caída libre, lo que implica que todos los cuerpos animados de esa misma velocidad inicial sigan exactamente la misma trayectoria y se produzca de nuevo el fenómeno de la ingravidez. Esto es justamente lo que ocurre en las estaciones espaciales, sondas o satélites artificiales en órbita alrededor de la Tierra, que están en un movimiento en caída libre y contrarrestan exactamente el efecto de la gravedad. **Un astronauta dentro de una de estas estaciones se mueve con la misma aceleración que la carcasa de la estación y todos los objetos contenidos en la misma. Se produce ingravidez, aunque todo sigue sujeto a la atracción terrestre;** de otra forma se alejaría indefinidamente de la Tierra. Hoy este fenómeno es un hecho familiar debido a las imágenes de astronautas y de todo tipo de objetos en órbita, que nos los muestran flotando como si estuvieran libres en el espacio y no sometidos a ninguna fuerza externa.

***Ejemplo.** La Estación Espacial Internacional se encuentra a unos 400 km de altura sobre la Tierra. Para que, impulsada únicamente por la gravedad terrestre, se mueva en una órbita circular, la velocidad tangencial v a la que hay que impulsarla tiene que ser tal que la fuerza centrípeta responsable del movimiento circular sea precisamente igual a la fuerza gravitatoria:*

$$m \frac{v^2}{R_T + h} = G \frac{m_T m}{(R_T + h)^2}$$

y sabiendo, a partir de la ecuación (3.2), que $Gm_T = gR_T^2$, resulta que:

$$v^2 = \frac{gR_T^2}{R_T + h}$$

Sustituyendo ahora g y R_T por los valores ya conocidos y poniendo $h = 400 \text{ km}$, obtenemos:

$$v = 7.660 \text{ m/s} \approx 27.600 \text{ km/h}$$

3.1.4 *Los efectos de la ingravidez sobre el cuerpo humano*

Los organismos vivos han evolucionado en un entorno caracterizado por la presencia constante de la gravedad terrestre, y a ella se han adaptado.

Nuestra cabeza pesa sobre el tronco, éste sobre las piernas y todo el cuerpo sobre los pies. Lo mismo pasa con los órganos internos o la circulación de la sangre, que actúan según mecanismos que tienen en cuenta la existencia de la gravedad. Sin embargo, como hemos visto, los efectos de la fuerza gravitatoria desaparecen en caída libre, uno de cuyos casos particulares es el movimiento en una órbita alrededor de la Tierra. Así, en las últimas décadas se ha podido experimentar sobre las respuestas de los organismos a la ingravidez, condición en la que se producen los viajes espaciales.

Todas las partes del organismo reaccionan a este cambio en las condiciones del entorno, desde el cerebro a los huesos pasando por los receptores de la gravedad, los sentidos, los músculos y los fluidos corporales. Una de las primeras sensaciones es la de estar siempre inmóviles, aunque el cuerpo se mueva con relación a las paredes de la cápsula espacial, y sentir que es todo lo demás lo que se mueve. La razón es que el procesamiento de la información sobre nuestra posición (tanto la del centro de masas como la posición relativa de las distintas partes del cuerpo), que proviene de los órganos sensores de la gravedad (utrículo y sáculo) ya descritos en el primer capítulo, depende fuertemente de la dirección e intensidad de la fuerza gravitatoria, omnipresente sobre la superficie terrestre pero ausente en condiciones de ingravidez. Lo mismo ocurre con las tensiones sufridas por músculos y tendones, y las señales procedentes de la vista y del tacto.

La ausencia de indicaciones claras procedentes del utrículo y el sáculo indicando cuál es la dirección “hacia abajo”, de peso en los miembros y de presión en la planta del pie, el relajamiento de los músculos que ya no tienen que ejercer fuerzas variables para mantener la posición erguida o el movimiento, todo ello provoca mareos, dolor de cabeza, vómitos, pérdida de concentración y una confusión

posicional que se traduce en la sensación subjetiva de estar “boca abajo”. Muchos de estos síntomas, como los mareos o los vómitos, desaparecen tras el primer o los primeros días de ingravidez, aunque otros son más persistentes. En cuanto a la confusión acerca de la posición, el cerebro se adapta al nuevo entorno y modifica el procesamiento de los impulsos provenientes de los distintos órganos, acabando por asociar la dirección “hacia abajo” a aquella en la que se encuentran los pies.

Un cambio importante es el relacionado con la circulación de la sangre. En efecto, sobre la superficie terrestre, la presión de la sangre en las venas y las arterias de los pies es superior a la que tiene en las de la cabeza, debido a su propio peso, como veremos más adelante en detalle. En cuanto una persona se sitúa en condiciones de ingravidez, aumenta el flujo sanguíneo hacia la cabeza y disminuye el de las partes del cuerpo que están por debajo del corazón. Las venas del cuello se hinchan y se produce una sensación de congestión en la cabeza y aparato respiratorio, parecida a la que se tiene cuando se está resfriado. La presión excesiva de la sangre sobre la cabeza sólo disminuye parcialmente cuando se hace ejercicio y hay una demanda suplementaria de riego sanguíneo en otras partes del cuerpo.

El conjunto de los fluidos se redistribuye debido a la ausencia de gravedad y siempre siguiendo la misma pauta: fluyendo de la parte inferior del cuerpo, donde tiene tendencia a acumularse en condiciones de gravedad, a la parte superior. Así, cada pierna pierde casi un litro de fluido, lo que supone del orden de un décimo de su volumen, tras un solo día sin gravedad. El cambio en la distribución y flujo de los fluidos corporales afecta a prácticamente todos los órganos del cuerpo así como a los mecanismos hormonales y mecánicos que regulan dichos flujos y los electrolitos disueltos en los fluidos. El ritmo de filtrado de los riñones aumenta en casi un 20 por ciento durante la primera semana en el espacio y se produce una forma de anemia debido a la destrucción de glóbulos rojos provocada por la disminución del volumen total que ocupa el plasma.

Por último se producen efectos sensibles también sobre las estructuras que dan consistencia y permiten el movimiento del cuerpo: músculos y huesos. La espina dorsal deja de estar comprimida por nuestro propio peso y se expande elásticamente, de forma que en el espacio se aumenta de estatura unos cinco o seis centímetros. La caja torácica también se expande y el hígado, el estómago, los riñones y el resto de los órganos dejan de pesar y “flotan” dentro de la cavidad corporal generando la sensación de que están sueltos y se mueven libremente.

En cuanto a los músculos esqueléticos, justamente aquellos que sirven para mantenerse erguido contra la gravedad terrestre e impulsarse en dicho medio, dejan de ser útiles y se atrofian rápidamente, perdiendo una parte importante de su masa. De ahí que sea imprescindible el ejercicio físico intenso para hacer trabajar a todos estos músculos, preservar las capacidades motoras y hacer

menos penoso el retorno a condiciones de gravedad. Los huesos pierden masa también, a un ritmo del orden del 1 por ciento al mes. La pérdida se debe a la ruptura del equilibrio en la actividad de reposición de tejido óseo por los osteoblastos, actividad que está regulada por la presencia de ciertas hormonas en la sangre y por las tensiones mecánicas sobre el hueso.

Teniendo en cuenta que el 99 % del calcio en el cuerpo está formando parte del esqueleto, la pérdida de masa ósea implica un aumento del nivel de calcio en la sangre, alterando la regulación de muchos mecanismos celulares sensibles a dicho nivel, y propiciando la aparición de “cálculos” en los riñones. La mayoría de estos efectos se corrigen una vez se vuelve al entorno terrestre, pero no se sabe todavía si alguna pérdida de masa ósea es irreversible, en cuyo caso se producirá una mayor propensión a las fracturas. Salvo este último efecto, sobre cuya reversibilidad existen dudas, todos los otros efectos desaparecen con bastante rapidez una vez se retorna a la superficie y se experimenta la sensación de peso. Todo parece indicar que es perfectamente posible vivir durante periodos de tiempo muy prolongados en condiciones de ingravidez, debido a las adaptaciones del organismo a las nuevas condiciones externas, y luego volver a reintegrarse en el entorno terrestre.

3.2 Fuerzas de contacto

Cuando un cuerpo está sometido a una fuerza, por ejemplo la de su propio peso debido a la gravedad terrestre, debe moverse con la aceleración que se deriva de la segunda ley de Newton. Sin embargo, cuando el cuerpo está apoyado en una superficie sólida, por ejemplo el suelo, no se mueve, lo que, de acuerdo con dicha ley, implica que la suma de las fuerzas que actúan sobre él es cero. Por lo tanto, **la fuerza de la gravedad está compensada por otra fuerza igual y de sentido contrario que ejerce el suelo sobre el cuerpo, de forma que su suma es cero.**

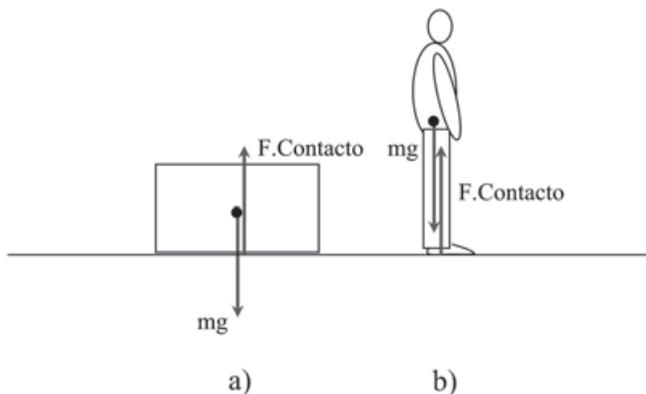


Fig. 3.6 Fuerzas de contacto de una superficie sólida sobre a) un objeto con forma de paralelepípedo, b) una persona.

Esta fuerza, llamada de contacto, que no debe confundirse con las fuerzas de acción y reacción a dos cuerpos introducidas en la tercera ley de Newton, resulta de la combinación de multitud de interacciones intermoleculares en el material de la superficie, que son las que le dan rigidez. Puede entenderse mejor su origen considerando lo que ocurre cuando el objeto en cuestión se apoya sobre una superficie elástica tal como se ilustra en la figura 3.7.

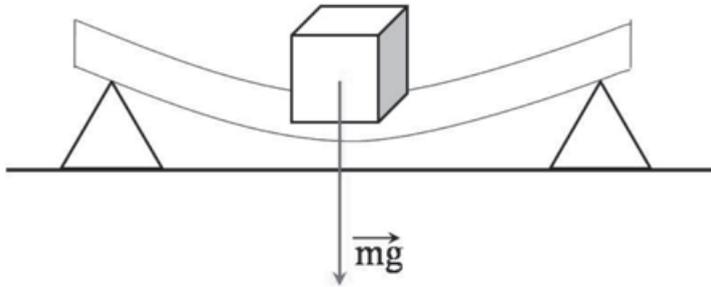


Fig. 3.7. Deformación inducida por un cuerpo sobre una superficie sólida en razón de su peso.

Su peso deforma la superficie y esa deformación genera una fuerza elástica, resultado de sumar múltiples interacciones intermoleculares, que tiende a recuperar la forma plana, que es la de equilibrio interno de la superficie. La nueva posición de equilibrio se alcanza cuando la fuerza elástica de recuperación iguala al peso del cuerpo sobre la superficie. Pues bien, esta fuerza elástica es lo que llamamos, en general, fuerza de contacto y queda claro que **es siempre igual a la fuerza efectiva (el peso, en este caso) y normal a la superficie de contacto** (en caso de existir una componente tangencial, el cuerpo deslizaría sobre la superficie). En el caso límite en el que el peso tienda a cero, la superficie permanece en su posición inicial y no genera ninguna fuerza de contacto. Por supuesto, cuando el peso (por unidad de superficie) es demasiado grande y supera el límite de rotura de la superficie de apoyo, ésta se rompe y el cuerpo cae libremente. Pues bien, aunque no seamos capaces de percibir la deformación de una superficie rígida sobre la que se apoya un objeto, siempre se da un fenómeno similar, de forma que la fuerza de contacto que genera es de la misma naturaleza que en el caso de la superficie deformable elásticamente.

Siempre que un cuerpo ejerce una fuerza sobre otro cuerpo sólido insuficiente para romperlo o moverlo es porque este último desarrolla una fuerza de contacto que contrarresta la fuerza original. Este tipo de fuerzas **se aplican siempre en puntos de la superficie de contacto entre los dos cuerpos y tienen, en caso de estar por debajo del límite de rotura, una magnitud suficiente para contrarrestar las fuerzas efectivas, pero no más. Así, para la superficie**

sólida sobre la que está apoyado un cuerpo, la fuerza de contacto hacia arriba sobre el cuerpo es igual al peso de éste, sea grande o pequeño. Ya veremos que ésta es una idea básica para estudiar el equilibrio de un conjunto de cuerpos en contacto.

Un caso particular de esta situación es el de un cuerpo colgando de una cuerda. El peso del cuerpo tira de ésta hacia abajo, pero en la configuración de la figura 3.8, en la que el sistema cuerda-cuerpo está en reposo, tiene que haber una fuerza de contacto hacia arriba que la contrarreste, esta vez ejercida por la cuerda sobre el cuerpo; en caso contrario, el cuerpo se movería hacia abajo. De nuevo, esta fuerza es el resultado de las interacciones entre las moléculas de la cuerda que hacen que ésta se mantenga con una longitud constante; si la fuerza de contacto que tiene que ejercer para compensar el peso del cuerpo es demasiado grande, puede superarse el límite de rotura, en cuyo caso la cuerda se rompe.

Siempre que nos mantengamos por debajo de dicho límite, el peso es transmitido, a su vez, por la cuerda hasta el punto de inserción en el techo que ejerce una fuerza de contacto igual a dicho peso para mantener todo el sistema en reposo. Cuando el cuerpo se mueve libremente hacia abajo, la única fuerza actuante es la gravedad y la cuerda no ejerce acción ninguna sobre él. Para casos intermedios, en los que el cuerpo cae, pero con una aceleración menor que la de la gravedad, el peso es parcialmente contrarrestado por una fuerza que tira hacia arriba, por ejemplo por una goma elástica, e induce una disminución en la aceleración de caída.

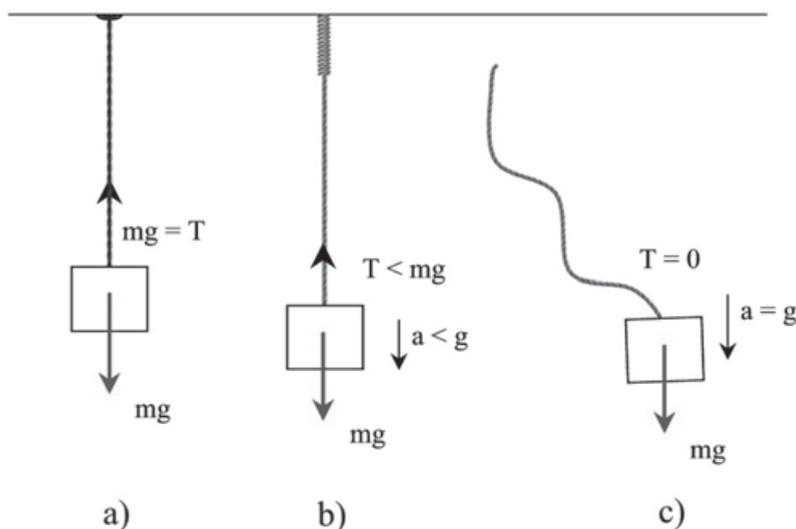


Fig. 3.8. Peso colgado de una cuerda. a) sujeta rígidamente al techo, b) sujeta al techo mediante una estructura elástica, c) suelta.

Ejemplo. Consideremos el caso sencillo de un par de cuerpos, como los de la figura 3.9, ligados por una cuerda que tomaremos, para simplificar, inextensible y de masa cero. Así, cuando la cuerda está tensa, en cada uno de sus dos extremos actúa una fuerza, que es la tensión.

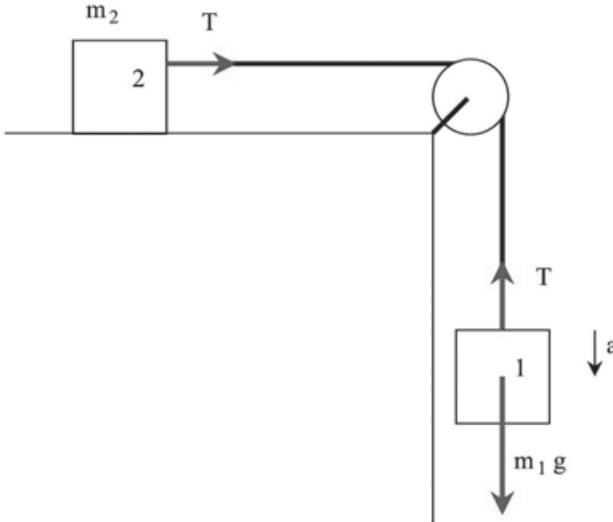


Fig. 3.9. Sistema de dos cuerpos ligados moviéndose.

Como la cuerda no se rompe, ni se estira, la tensión es transmitida a lo largo de todos sus puntos y es la misma en los dos extremos. Todo el sistema se mueve por la acción del peso del cuerpo 1, por lo que la fuerza externa total es m_1g , mientras que la masa total es $m_1 + m_2$. Así, en ausencia de rozamiento, la aceleración con la que se moverán los dos cuerpos (y la cuerda que los liga) resulta de aplicar la segunda ley de Newton:

$$F = m_1g = (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g \quad (3.4)$$

Podemos ahora calcular la tensión, que es la fuerza de contacto T con la que la cuerda tira de ambos cuerpos (frenando el 1 y acelerando el 2). Concentrémonos, para empezar, en el movimiento del cuerpo 1: se mueve con la aceleración dada por la expresión (3.4), y sobre él actúan dos fuerzas, su propio peso y la tensión T , con sentidos contrarios. Por lo tanto, de la segunda ley de Newton se sigue que:

$$m_1 g - T = m_1 a = m_1 \frac{m_1}{m_1 + m_2} g$$

de donde se puede despejar T :

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Pero esta misma tensión es la que ejerce la cuerda sobre el segundo cuerpo, de forma que puede verificarse la coherencia de todo el esquema considerando el cuerpo número 2 y viendo que sobre él sólo actúa la tensión de la cuerda (su propio peso está cancelado exactamente por la fuerza de contacto de la superficie sólida). La aceleración con la que se moverá debe responder a la segunda ley de Newton:

$$a = \frac{T}{m_2} = \frac{1}{m_2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g$$

que coincide con el valor encontrado estudiando el sistema completo, como era de esperar dado que ambos cuerpos se mueven con la misma aceleración. Si, por ejemplo, el cuerpo 1 tiene una masa de 1 kg y el cuerpo 2 de 9 kg, la aceleración con la que se mueve el conjunto de ambos es $a = 0,1 g = 0,98 \text{ m/s}^2$, mientras que la tensión de la cuerda es $T = 8,82 \text{ N}$. Obsérvese que en el límite en el que m_2 tiende a infinito, la aceleración con que se mueve el sistema es cero y la tensión de la cuerda tiende al peso del cuerpo 1, es decir, el cuerpo 2 permanece inmóvil debido a su inercia infinita y el cuerpo 1 cuelga de la cuerda teniendo que ejercer ésta una fuerza hacia arriba igual al peso de dicho cuerpo. En el otro límite, cuando m_2 tiende a cero, la aceleración de caída es la de la gravedad y la tensión es cero. Corresponde al caso de que la cuerda cuelgue libremente del cuerpo que está cayendo sin arrastrar ninguna otra masa.

3.3 La fuerza centrífuga

Otro caso importante de fuerza de contacto es la llamada fuerza centrífuga. Ya sabemos que para que un cuerpo describa una trayectoria curva, por ejemplo una circunferencia, hay que ejercer sobre él una fuerza centrípeta, dirigida hacia el centro de curvatura, que es la responsable de que no siga un movimiento rectilíneo y uniforme.

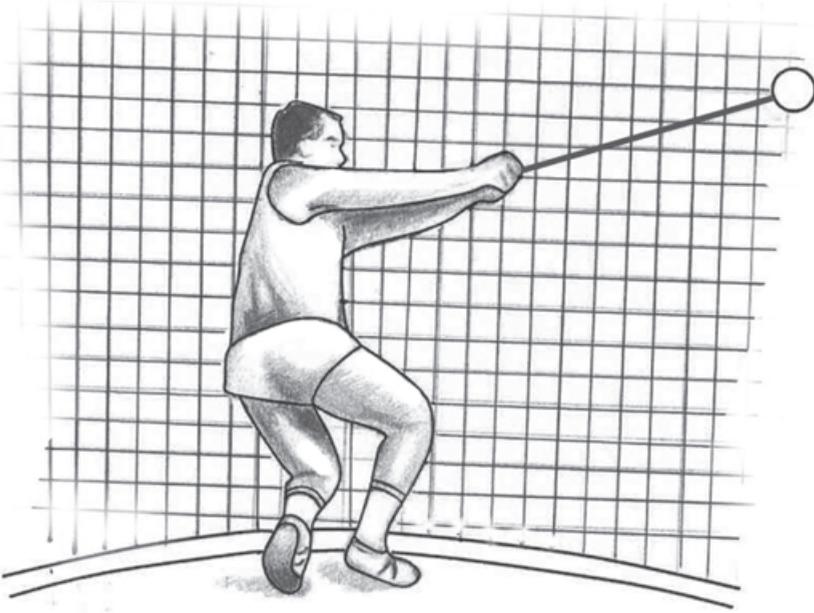


Fig. 3.10. Lanzador de martillo.

Esta fuerza puede ser ejercida por una cuerda fijada al objeto que gira, en el caso de un lanzador de martillo, por ejemplo, tal como puede apreciarse en la figura 3.10. La bola sobre la que se ejerce la fuerza centrípeta debe ejercer sobre la cuerda que tira de ella una fuerza de contacto igual y cambiada de signo, es decir, hacia fuera, que se llama fuerza centrífuga. Pero su carácter de fuerza de contacto, derivada de las interacciones que mantienen pegada la bola a la cuerda, se manifiesta en el hecho de que cuando cesa la fuerza centrípeta, por ejemplo al cortar la cuerda o soltarla en el caso del lanzador, la bola sigue un movimiento rectilíneo en dirección tangente a la trayectoria y no en sentido contrario al centro de curvatura.

La fuerza efectiva que se aplica para forzar una determinada trayectoria es la centrípeta, mientras que la centrífuga no es independiente, sino que aparece como fuerza de contacto igual y de sentido contrario a la centrípeta y no se aplica sobre el cuerpo que gira, sino que es éste el que la ejerce sobre el dispositivo que le hace girar. En el caso de una persona en una centrífuga de entrenamiento, en la disposición de la figura 1.18, la fuerza centrípeta se ejerce sobre la espalda de la persona por el respaldo del asiento que gira y es esta fuerza la que hace que describa una trayectoria circular. Ahora bien, el hecho de que la espalda permanezca pegada al respaldo implica que la espalda ejerce sobre éste una fuerza igual y de sentido contrario, que es la fuerza centrífuga. Este mismo fenómeno ocurre cuando un automóvil gira

y las personas que van dentro se aprietan contra la pared situada en el lado contrario al centro de curvatura. El cuerpo de la persona seguiría en línea recta si no hubiera ninguna interacción y gira porque la pared del coche (o la fricción con el asiento) ejercen una fuerza centrípeta sobre él, generándose entonces la correspondiente fuerza de contacto, centrífuga, del cuerpo sobre la pared.

Ejercicio. Una atracción de feria consiste en una cápsula colgada al extremo de una varilla (o una cadena tensa). El otro extremo está fijo a un eje vertical que puede girar sobre sí mismo arrastrando a la varilla, la cápsula y la persona situada dentro de ella, tal y como se indica en la figura 3.11.

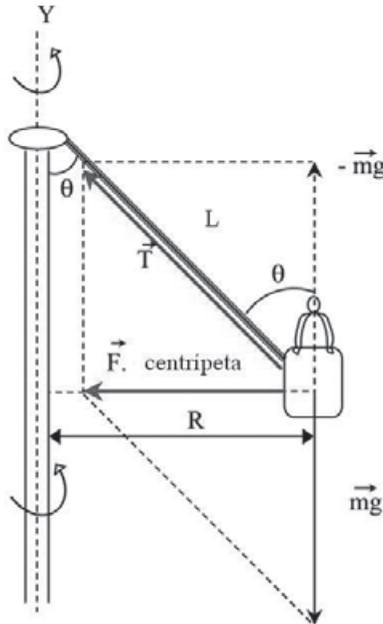


Fig. 3.11. Persona en una cabina sujeta por un brazo articulado fijo a un eje en rotación.

Al girar, la varilla pivota sobre el extremo fijo al eje Y se separa hasta alcanzar una posición de equilibrio que es distinta en función de la frecuencia de giro. Calcularemos la velocidad angular ω necesaria para que la varilla se eleve hasta formar un ángulo de 60° con la vertical.

Veamos cuál es el juego de fuerzas en presencia. Sobre el cuerpo de la persona actúan su propio peso y la fuerza de contacto ejercida por la cápsula en la dirección de la varilla que mantiene a ésta sujeta al eje de giro. La componente vertical de esta fuerza de contacto debe compensar al peso e impedir que se mueva hacia abajo, mientras que la componente horizontal es la fuerza centrípeta transmitida por la cápsula en rotación responsable del movimiento circular uniforme alrededor del eje vertical:

$$T \cos \theta = mg \quad (3.5)$$

$$T \sin \theta = m\omega^2 R \quad (3.6)$$

Dividiendo, ahora, la segunda ecuación por la primera, obtenemos:

$$\tan \theta = \frac{m\omega^2 R}{mg} = \frac{\omega^2 L \sin \theta}{g}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{L \cos \theta}$$

Así, si la longitud de la varilla es de 5 m, la velocidad angular necesaria para mantenerla formando un ángulo de 60° es:

$$\omega = \sqrt{\frac{9,8}{5 \times \frac{1}{2}}} = 1,98 \text{ rad/s}$$

que equivale a una frecuencia de giro de $f = \frac{\omega}{2\pi} = 0,32$ revoluciones por segundo o a 19 revoluciones por minuto.

Como se ha visto, al concentrarnos en las fuerzas reales sobre la persona no aparece la fuerza centrífuga, que es una fuerza de contacto ejercida sobre la cápsula.

Como veremos en la sección dedicada a las centrífugas de experimentación, si nos situamos en el sistema de referencia en rotación, la fuerza centrífuga se manifiesta también aun cuando no exista un soporte rígido ligado al cuerpo. Estas fuerzas, que no son reales pero aparecen cuando describimos el movimiento en un sistema de referencia no inercial, en el que no se cumplen las leyes de Newton tal y como han sido formuladas, se llaman ficticias.

3.4 Fuerzas de rozamiento

3.4.1 Movimiento de un cuerpo sobre una superficie sólida

Cuando un cuerpo desliza sobre una superficie sólida se produce una fuerza de rozamiento derivada de las múltiples interacciones entre las moléculas de la superficie y del cuerpo. De nuevo, la composición de todas estas interacciones, de origen electromagnético, resulta en una fuerza simple que **nunca puede ser mayor que la fuerza efectiva externa que se aplica al cuerpo para moverlo**. Cuando empujamos un ladrillo que está sobre una superficie sólida con una fuerza pequeña, el ladrillo no se mueve porque la fuerza de rozamiento la

compensa exactamente. La fuerza de rozamiento no puede ser más grande porque entonces el ladrillo se movería en dirección contraria a la fuerza que estamos aplicando. Cuando la fuerza que aplicamos es superior a la fuerza máxima de rozamiento, el ladrillo empieza a desplazarse, aunque con una aceleración menor que la que tendría si no hubiera rozamiento porque hay una compensación parcial de fuerzas.

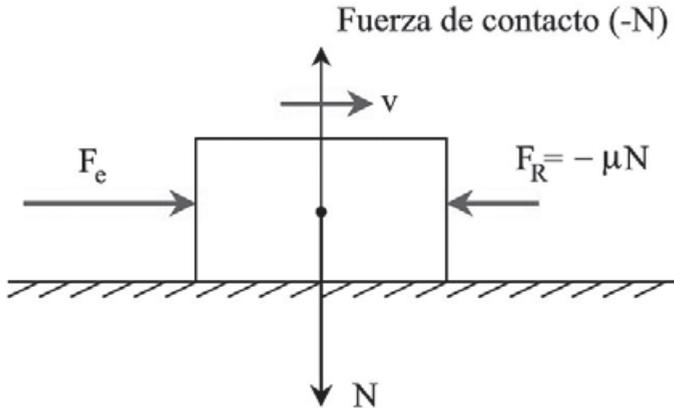


Fig. 3.12. Las fuerzas que actúan sobre un cuerpo que desliza sobre una superficie sólida por la acción de una fuerza externa F_e .

Las características de la **fuerza máxima de rozamiento o fricción** son las siguientes:

- **Va siempre en sentido contrario a la velocidad del cuerpo y, por consiguiente, lo frena.**
- **Depende de la fuerza con la que ambas superficies se mantienen en contacto.** Lógicamente cuanto mayor sea esta fuerza, menor es la distancia entre moléculas y más grande es la fuerza de fricción.
- **Depende de la naturaleza de dichas superficies.**

La expresión que resume estas propiedades de forma más sencilla es la siguiente:

$$\vec{F}_R = -\mu N \vec{u} \quad (3.7)$$

donde \vec{u} es el vector unitario paralelo a la velocidad, N es la fuerza normal a ambas superficies que las mantiene unidas, normalmente la componente vertical del peso del cuerpo que desliza sobre una superficie horizontal, y μ es un coeficiente que depende de la naturaleza de las superficies, pequeño para superficies pulidas y grande para superficies rugosas. Además, el hecho de que sea más fácil mantener un cuerpo deslizando sobre una superficie, una vez

que está ya en movimiento, que ponerlo a deslizar desde el reposo implica que dicho coeficiente tiene valores distintos en ambas circunstancias. Por lo tanto, distinguiremos el coeficiente estático μ_0 y el dinámico, μ , para el cuerpo en movimiento, de forma que **se cumple la condición:** $\mu_0 > \mu$. De la ecuación (3.7) se sigue que **dicho coeficiente no tiene dimensiones.**

En realidad, el coeficiente dinámico μ depende de la velocidad pero normalmente se aproxima por un valor promedio constante.

Tabla 3.1. Algunos valores del coeficiente de rozamiento	
Superficies en contacto	μ_0
Cabeza del fémur con la cadera y líquido sinovial	$\sim 0,003$
Cera de esquí sobre nieve seca	$\sim 0,04$
Cera de esquí sobre nieve húmeda	$\sim 0,1$
Superficies con lubricante industrial	$\sim 0,1$
Madera sobre madera	$0,25 \sim 0,50$
Madera sobre ladrillo	$0,30 \sim 0,40$
Goma sobre sólido	$1 \sim 4$

Ejemplo. Consideremos un cuerpo de masa m sobre una superficie inclinada un ángulo α con respecto a la horizontal, según la figura 3.13.

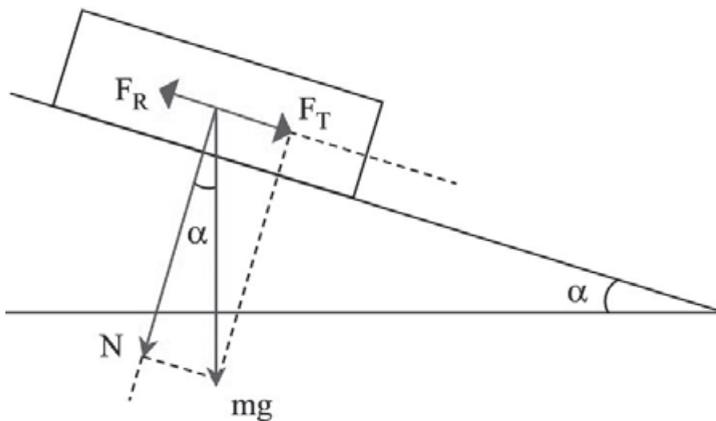


Fig. 3.13. Cuerpo en equilibrio sobre una pendiente debido al rozamiento.

La componente normal a ambas superficies es:

$$N = mg \cos \alpha$$

mientras que la componente del peso que tira paralelamente a la superficie es:

$$F_T = mg \operatorname{sen} \alpha$$

Mientras el cuerpo está en reposo, la fuerza máxima de rozamiento será igual a $\mu_0 N$ y no se moverá hasta que la fuerza que tira del cuerpo la supere. Si partimos de la posición horizontal y vamos aumentando el ángulo de inclinación, el cuerpo empezará a moverse cuando se llegue a un valor de α tal que:

$$\mu_0 \times mg \cos \alpha = F_T = mg \sin \alpha$$

Es decir, el ángulo mínimo para el que se iniciará el movimiento es tal que:

$$\operatorname{tg} \alpha = \mu_0$$

Una vez que el cuerpo está en movimiento, la aceleración con la que se mueve se obtendrá aplicando la segunda ley de Newton:

$$mg \operatorname{sen} \alpha - \mu \times mg \cos \alpha = ma$$

$$a = (\operatorname{sen} \alpha - \mu \cos \alpha)g = \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} - \mu \right) g \cos \alpha = (\mu_0 - \mu) g \cos \alpha$$

Para el caso de la plataforma de un camión volquete y una caja de madera deslizando por ella, el coeficiente estático puede ser del orden de 0,6, con lo que el ángulo a partir del cual la caja comienza a deslizar es:

$$\operatorname{tg} \alpha = 0,6; \quad \alpha \approx 31^\circ$$

Si el coeficiente dinámico promedio μ es 0,5, la aceleración con la que la caja desliza para dicho ángulo será de $0,84 \text{ m/s}^2$.

Un procedimiento eficaz, por lo tanto, de estimar experimentalmente el coeficiente de rozamiento estático es medir el ángulo de inclinación a partir del cual un cuerpo desliza sobre una superficie. Es lo que se ha hecho con animales sobre superficies duras y pulidas, aunque sólo es posible realizar el experimento con crías de las distintas especies, ya que los animales adultos saltan o se escapan mucho antes de que se alcance el ángulo de deslizamiento.

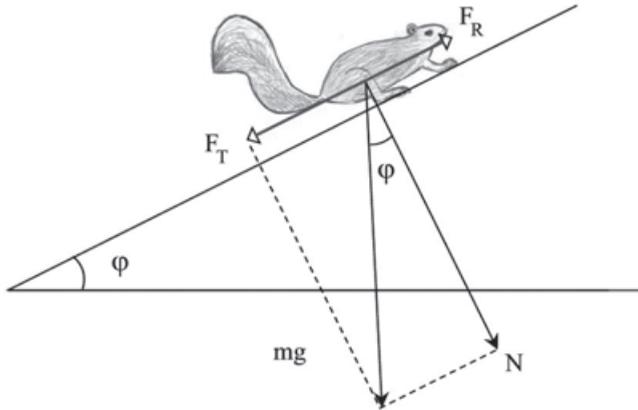


Fig. 3.14. Ardilla sobre una superficie inclinada. La fuerza de rozamiento, F_R , es igual a la componente normal del peso, N , multiplicada por el coeficiente de rozamiento.

Las palmas de las manos y las plantas de los pies de los primates son rugosas y tienen un coeficiente de rozamiento notablemente alto, de forma que una cría de lémur (*Microcebus*) es capaz de mantenerse sin deslizar hasta un ángulo de inclinación de unos 72° , lo que implica que μ_0 es del orden de 3. Una persona sobre sus pies y manos desliza normalmente antes de llegar a los 45° , lo que implica que μ_0 es menor que 1. Por el contrario, una cría de ardilla (*Sciurus*) comienza a deslizar sobre una superficie dura cuando el ángulo llega a los 35° ($\mu_0 \approx 0,7$), aunque si pudiera clavar sus uñas para trepar podría hacerlo sobre una superficie vertical.

Los lubricantes tienen como función alisar las irregularidades microscópicas de las superficies, metiéndose en los intersticios, y crear una lámina entre las superficies que facilita el deslizamiento. Disminuyen, por lo tanto, el coeficiente de rozamiento.

El roce entre las superficies de los huesos en una articulación, por ejemplo entre la cabeza del fémur y el alveolo semiesférico situado en la cadera en el que se aloja, el acetábulo, sería grande y el movimiento muy penoso si no existieran mecanismos que disminuyen enormemente el coeficiente de rozamiento. Así, sobre las superficies articulares (*epífisis*) se sitúa un cartílago hialino muy liso que facilita el deslizamiento, al tiempo que la articulación se lubrica con el líquido sinovial. Éste está compuesto esencialmente de agua (un 94 por ciento) pero tiene también pequeñas cantidades de albúmina, globulina y otras proteínas y es capaz de rebajar el coeficiente de rozamiento dinámico hasta un valor del orden de 0,003 haciendo que las pérdidas por rozamiento sean ínfimas y que las superficies óseas no sufran con el roce continuo durante la locomoción u otra forma de movimiento.

Ejemplo. Volvamos a la figura 3.9, en la que un objeto de masa m_1 arrastraba con su peso a otro objeto de masa m_2 deslizando sobre una superficie horizontal. Añadamos ahora la fuerza de rozamiento entre el cuerpo y la superficie.

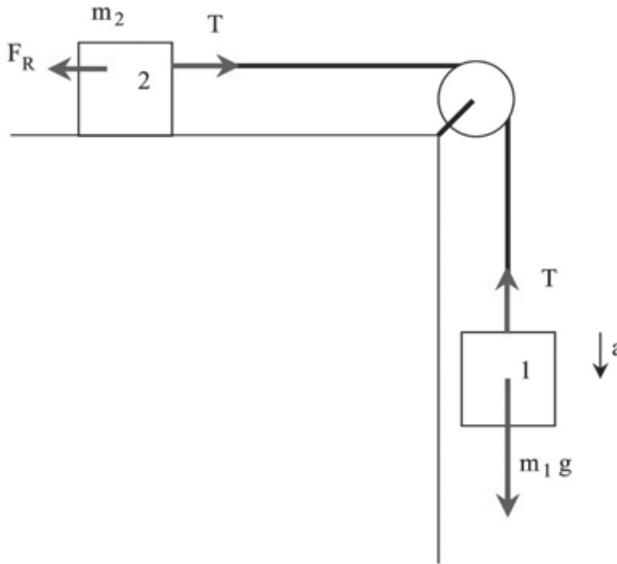


Fig. 3.15. Sistema de dos cuerpos ligados con rozamiento sobre la superficie de deslizamiento.

Para que el sistema de los dos cuerpos se ponga en movimiento es necesario que la fuerza m_1g sea superior a la fuerza de rozamiento estático $\mu_0 m_2g$. Es decir, debe cumplirse que:

$$m_1 \geq \mu_0 m_2$$

Si, por ejemplo, la masa m_2 es de 9 kg y el coeficiente de rozamiento estático es del orden de 0,8, la masa m_1 necesaria para mover al sistema tiene que ser superior a 7,2 kg. Una vez que las dos masas están en movimiento, la aceleración con la que se mueven viene dada por:

$$m_1g - \mu m_2g = (m_1 + m_2)a$$

de donde se deduce que:

$$a = \frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2} g$$

Para el caso de una masa m_1 mínima, de 7,2 kg, suponiendo que el coeficiente de rozamiento dinámico sea de 0,7, la aceleración será de unos 0,54 m/s². La tensión de la cuerda puede calcularse analizando, por ejemplo, el movimiento de la masa m_1 :

$$m_1 g - T = m_1 a$$

y, por lo tanto,

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (1 + \mu) g$$

que, para el caso que estamos considerando resulta ser de unos 67 N. Nótese que todas las expresiones obtenidas en este ejemplo se reducen a las de la sección 3.2 haciendo cero el coeficiente de rozamiento.

3.4.2 Movimiento de un cuerpo en un fluido

Cuando un cuerpo sólido se mueve en un fluido, por ejemplo aire o agua, bajo la acción de una fuerza externa, se produce una interacción entre el cuerpo y el fluido. Esta interacción es el resultado de multitud de interacciones entre átomos y moléculas, todas de carácter electromagnético, de una enorme complejidad pero cuyo resultado neto es disipar parte de la energía de movimiento del cuerpo y frenarlo. Se trata, por lo tanto, de una fuerza derivada que se añade a las que puedan ya estar actuando sobre él. No es posible deducir, a partir de las interacciones intermoleculares, una expresión para dicha fuerza, pero puede aproximarse su dependencia con las variables que intervienen en el problema a partir de los conocimientos adquiridos en mecánica de fluidos.

La fuerza de rozamiento, o de fricción, va siempre en dirección contraria al movimiento del cuerpo (a su velocidad) y contribuye a frenarlo. Además, es tanto más grande cuanto mayor es la velocidad relativa entre el cuerpo y el fluido y se anula cuando no existe dicho movimiento. Como veremos en el capítulo 14, existe una cantidad sin dimensiones, llamada número de Reynolds, que permite comparar la relación entre la inercia del cuerpo que se mueve y la fuerza debida a la fricción con el fluido. El número de Reynolds se define de la siguiente forma:

$$N_R = \frac{\rho v R}{\eta} \quad (3.8)$$

donde ρ es la densidad del fluido, v es la velocidad con la que se mueve el cuerpo, R es una dimensión lineal característica de su tamaño y η es un parámetro llamado viscosidad del fluido cuya definición precisa se verá en el capítulo 14. Para el agua, por ejemplo, los valores de ρ y η son tales que:

$$N_R = 10^6 \times vR$$

donde v y R se expresan en unidades del SI.

Cuando el número de Reynolds es pequeño, pongamos menor que 1, la fuerza debida a la viscosidad del fluido es muy grande y la inercia del cuerpo en movimiento es irrelevante. En este límite es preciso hacer una fuerza constante para poder moverse y en cuanto cesa la fuerza cesa el movimiento por efecto de la fricción. El movimiento de los microorganismos movidos por su propia impulsión o por la fuerza de la gravedad se sitúa dentro del régimen de pequeños números de Reynolds: desde $N_R = 10^{-5}$ para una bacteria hasta $N_R = 10^{-1}$ para un ciliado. En el caso de macromoléculas, núcleos, fragmentos de ADN, etc., moviéndose en un medio viscoso como en las centrifugas de experimentación en bioquímica, el número de Reynolds es todavía más pequeño. **En todos estos casos de número de Reynolds menor que 1 se verá que la fuerza de fricción puede aproximarse por una expresión proporcional a la velocidad.**

El movimiento de la mayoría de los animales acuáticos se sitúa, sin embargo, dentro del régimen de números de Reynolds grandes, desde $N_R = 10^8$ para una ballena hasta $N_R = 10^4$ para los grandes peces o mamíferos marinos, $N_R = 10^5$ para un buceador o $N_R = 10^2$ para un pez pequeño. Y lo mismo ocurre con todos los animales saltadores o voladores. En este caso, **la inercia es más importante que la fuerza de fricción y se verá también que ésta es aproximadamente proporcional al cuadrado de la velocidad.**

Fuerza proporcional a la velocidad

La fuerza de rozamiento de un cuerpo moviéndose en un fluido puede aproximarse, en caso de que el número de Reynolds asociado a su movimiento sea menor que 1, con una expresión del tipo:

$$\vec{F}_R = -\beta\vec{v} \quad (3.9)$$

donde β es un parámetro que depende de la forma del cuerpo y la viscosidad del fluido y \vec{v} es la velocidad relativa entre ambos.

Así, si \vec{F}_e es la fuerza efectiva, es decir, la fuerza que actúa sobre el cuerpo excluyendo el rozamiento, la fuerza total será igual a la efectiva más la de rozamiento y la segunda ley de Newton se escribirá del siguiente modo:

$$\vec{F}_e - \beta\vec{v} = m\vec{a} \quad (3.10)$$

Empezaremos por considerar un movimiento rectilíneo, en cuyo caso sólo interviene una dimensión. La ecuación (3.10) toma la forma:

$$F_e - \beta v = ma \quad (3.11)$$

Para el caso de que F_e sea constante, por ejemplo la fuerza de la gravedad terrestre, la ecuación anterior puede resolverse exactamente. De esta expresión se sigue que, **para cada fuerza F_e , hay una velocidad máxima, o velocidad límite, que no se puede sobrepasar.** En efecto, cuando se parte del reposo, la aceleración que adquiere el cuerpo es la que correspondería a la fuerza F_e sin rozamiento, pero según va aumentando la velocidad, el término $-\beta v$ se va haciendo más grande y la aceleración va disminuyendo. Si sólo existiera la fuerza efectiva, el cuerpo se movería con aceleración constante, pero el efecto de frenado del rozamiento se traduce en que la aceleración se hace cada vez más pequeña. Cuando la velocidad a la que se llega es lo suficientemente grande como para que el término de rozamiento compense exactamente la fuerza efectiva, la aceleración del movimiento se hace cero y la velocidad no puede aumentar. Se alcanza así lo que se llama **velocidad límite, que es la máxima posible para la fuerza efectiva, el cuerpo y el fluido de que se trate. Una vez alcanzada, la aceleración es siempre cero y la velocidad no puede aumentar más.** Para el caso de microorganismos, células o fragmentos de células o de macromoléculas en un medio acuático, esta velocidad límite es tan pequeña que se llega a ella de forma inmediata y el movimiento bajo la acción de una fuerza efectiva constante es uniforme. La velocidad límite v_L es, por lo tanto, el valor de la velocidad que hace que la aceleración en la expresión (3.11) sea cero:

$$v_L = \frac{F_e}{\beta} \quad (3.12)$$

La consecuencia más importante es que, **cuando existe fricción con un fluido, hay que hacer una fuerza continua para mantener una velocidad uniforme igual a la velocidad límite asociada a dicha fuerza. No se produce, en este caso, un movimiento uniformemente acelerado, sino que hay aceleración sólo de forma transitoria hasta llegar a la velocidad límite.**

Para cuerpos esféricos, el coeficiente β tiene la forma (fórmula de Stokes):

$$\beta = 6\pi R\eta \quad (3.13)$$

donde R es el radio de la esfera y η la viscosidad introducida en la ecuación (3.8). Para cuerpos con otras formas, el coeficiente adimensional (6π en el caso de la esfera) es distinto.

La viscosidad del agua es $\eta \approx 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{ s}^{-1}$, la del plasma sanguíneo es $\eta \approx 1,8 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{ s}^{-1}$ y la del aire es $\eta \approx 1,8 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Así, en el caso de un glóbulo rojo, cuyo radio es del orden de $2 \times 10^{-6} \text{ m}$, el parámetro β , cuando se mueve en plasma sanguíneo, es:

$$\beta = 6\pi \times 2 \times 10^{-6} \times 1,8 \times 10^{-3} = 0,68 \times 10^{-7} \text{ kg/m}$$

Observación. Corrección por el empuje de Arquímedes. Cuando un cuerpo cae en un fluido, además de la fuerza de gravedad y el rozamiento, actúa sobre él el empuje de Arquímedes hacia arriba, igual al peso de una cantidad de fluido que ocupa el volumen del cuerpo, es decir, $m_f g$, donde m_f es dicha masa de fluido. La fuerza efectiva total será, por lo tanto, $(m - m_f)g$, con lo que la única modificación que hay que hacer para tener en cuenta el empuje de Arquímedes es poner $m - m_f$ en todas las expresiones en lugar de la masa. Para el caso del movimiento en aire, la masa de aire que ocupa el volumen de un cuerpo denso es tan pequeña que la corrección es irrelevante y no es preciso tenerla en cuenta, pero para el movimiento en agua u otro líquido, la corrección es importante, hasta el punto de que para cuerpos menos densos que el líquido, la fuerza efectiva es vertical hacia arriba, lo que les hace ascender hasta que llegan a la superficie y se quedan flotando con una parte fuera del líquido y otra dentro dependiendo de la relación entre las dos densidades.

Un cuerpo esférico cayendo bajo su propio peso en un fluido tendrá como velocidad límite:

$$v_L = \frac{(m - m_f)g}{6\pi R\eta} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3(\rho - \rho_f)g}{6\pi R\eta} = \frac{2R^2(\rho - \rho_f)g}{9\eta} \quad (3.14)$$

donde ρ es la densidad del cuerpo y ρ_f es la densidad del fluido.

En el caso de un glóbulo rojo, cuyo radio es del orden de $2 \times 10^{-6} \text{ m}$ y su densidad $\rho = 1,3 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, la velocidad límite en plasma sanguíneo, cuya densidad es $\rho_f = 1,06 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, será:

$$v_L = \frac{2 \times (2 \times 10^{-6})^2 (1,3 - 1,06) \times 10^3 \times 9,8}{9 \times 1,8 \times 10^{-3}} = 1,16 \times 10^{-6} \text{ m/s}$$

Esta velocidad, también llamada de sedimentación, es minúscula y se alcanza prácticamente de forma inmediata, con lo que el movimiento en el medio fluido bajo la acción de su propio peso es uniforme. El tiempo de sedimentación en un solo centímetro de plasma para el glóbulo rojo será:

$$t = \frac{0,01}{1,16 \times 10^{-6}} = 8.600 \text{ s} = 2 \text{ h } 23 \text{ min}$$

El número de Reynolds asociado al movimiento del glóbulo rojo es:

$$N_R = \frac{1,06 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-6} \times 1,16 \times 10^{-6}}{1,8 \times 10^{-3}} = 1,4 \times 10^{-6} \ll 1$$

que justifica la aproximación proporcional a la velocidad. La distancia que recorre hasta llegar a la velocidad límite es menor que el tamaño de un átomo. Es decir, en caso de cuerpos tan pequeños, con números de Reynolds muy bajos, la aceleración inducida por la aplicación de una fuerza constante es irrelevante y hay que mantener dicha fuerza para moverse con un movimiento uniforme prácticamente desde el principio.

Ejemplo. Consideremos ahora el movimiento de un espermatozoide en un medio acuoso. Su tamaño es del orden de $5 \times 10^{-6} \text{ m}$ y se mueve, gracias al impulso que se da con su flagelo, a una velocidad de $40 \times 10^{-6} \text{ m/s}$ (lo que implica que puede avanzar unos 14 cm en una hora). El número de Reynolds será:

$$N_R = \frac{10^3 \times 5 \times 10^{-6} \times 40 \times 10^{-6}}{10^{-3}} = 2 \times 10^{-4} \ll 1$$

y la fuerza que debe desarrollar para moverse a esta velocidad es:

$$F \approx 6\pi R\mu v_L = 6\pi \times 5 \times 10^{-6} \times 10^{-3} \times 40 \times 10^{-6} = 3,8 \times 10^{-12} \text{ N}$$

Fuerza proporcional al cuadrado de la velocidad

Para el caso de movimientos en fluidos caracterizados por números de Reynolds mayores que 1, la fuerza de rozamiento se puede aproximar con una expresión de la forma:

$$\vec{F}_R = -\alpha v^2 \vec{u}_T \quad (3.15)$$

donde \vec{u}_T es el vector unitario en dirección de la velocidad y α un parámetro que depende de la forma del cuerpo, de su tamaño y de la densidad del fluido y que, con base en consideraciones dimensionales, puede escribirse de la siguiente forma:

$$\alpha = \frac{1}{2} C_A \rho_f S \quad (3.16)$$

donde ρ_f es la densidad del fluido, S la sección transversal del cuerpo y C_A una constante sin dimensiones, llamada coeficiente de arrastre, cuyo valor preciso es muy complicado deducir. Para el rango de velocidades en el que

la aproximación proporcional al cuadrado de la velocidad es la apropiada, C_A vale entre 0,5 y 1. No obstante, para cuerpos muy irregulares y con angulosidades C_A puede ser superior a 1 y para cuerpos con una forma aerodinámica puede ser inferior a 0,5.

Restringiéndonos también al caso de una dimensión y fuerza efectiva constante, para un movimiento con velocidad positiva la ecuación de Newton que nos da la aceleración es:

$$ma = m \frac{dv}{dt} = F_e - \alpha v^2 \quad (3.17)$$

Como en el caso anterior, la fuerza de rozamiento aumenta con la velocidad, por lo que la aceleración va disminuyendo. En el límite, la fuerza de rozamiento llega a compensar exactamente la fuerza efectiva, lo que resulta en una aceleración cero y un movimiento uniforme a partir de ese momento. Existe, por lo tanto, una velocidad límite que viene dada por la ecuación (3.17) cuando $a = 0$:

$$v_L = \sqrt{\frac{F_e}{\alpha}} \quad (3.18)$$

Para un cuerpo cayendo en aire por su propio peso podemos calcular la velocidad límite poniendo la densidad del aire, $\rho_f \approx 1,25 \text{ kg/m}^3$, y sustituyendo la fuerza efectiva por mg (en el caso de que la densidad del cuerpo sea comparable con la del aire habría, de nuevo, que tener en cuenta el empuje de Arquímedes). En la tabla 3.2 pueden verse algunas velocidades límite para objetos esféricos e irregulares cayendo en el aire, donde el rango de velocidades corresponde a tomar valores para el coeficiente de arrastre C_A comprendidos entre 0,5 y 1. En la última columna se da el número de Reynolds, comprobándose que, en todos los casos, es muy superior a 1.

Tabla 3.2. Velocidades límite en aire para algunos objetos				
Objeto	Masa	Superficie frontal	v_L	N_R
Gota de lluvia	$4 \times 10^{-6} \text{ kg}$	$3 \times 10^{-6} \text{ m}^2$	4,6-6,5 m/s	4×10^2
Gota de granizo	$4 \times 10^{-3} \text{ kg}$	$3 \times 10^{-4} \text{ m}^2$	14-20 m/s	10^4
Balón de fútbol	0,43 kg	0,038 m^2	13-19 m/s	10^5
Águila en caída libre	20 kg	0,1 m^2	56-79 m/s	10^6
Persona en caída vertical	75 kg	0,6 m^2	44-63 m/s	10^6
Bomba	500 kg	0,2 m^2	200-280 m/s	4×10^6

El valor experimental de la velocidad límite para una persona cayendo en el aire a la altura del mar se sitúa alrededor de los 55 m/s (200 km/h), que cae de lleno en el intervalo calculado. Para un águila en picado, la velocidad límite se aproxima a los 79 m/s (280 km/h), lo que implica tomar $C_A \approx 0,5$.

Cuando una persona cae con un paracaídas deportivo abierto, la velocidad límite es de tan sólo unos 3 m/s (o unos 10 km/h). La fuerza F_e sobre una persona cayendo en aire es la misma esté el paracaídas abierto o cerrado; lo que varía de un caso a otro es la fricción con el aire, mucho mayor con el paracaídas abierto debido a su mayor superficie y coeficiente de arrastre, lo que se traduce en un parámetro α más grande y una velocidad límite menor.

3.4.3 La centrífuga como instrumento de análisis

La centrifugación es un método muy extendido en los laboratorios de Biología para separar y analizar soluciones y suspensiones en un líquido de macromoléculas, células o componentes celulares. Permite determinar los componentes de un cierto material biológico sin que éstos resulten dañados en el proceso, así como purificar mezclas aislando cada uno de los componentes. El principio en el que se basa es la distinta velocidad límite que adquiere una partícula en un medio viscoso en función de su masa y de su forma.

En efecto, consideremos un conjunto de partículas en un líquido sometidas simplemente a la acción de gravedad. Tenderán a sedimentar, cayendo hacia el fondo de la vasija que contiene a la solución, pero la velocidad de sedimentación será distinta para cada clase de partícula. Como estamos considerando el movimiento de cuerpos con dimensiones y velocidades muy pequeñas moviéndose en un fluido viscoso, los números de Reynolds asociados serán también pequeños, por lo que podemos aproximar la fuerza de rozamiento con un término proporcional a la velocidad. Para este caso, recordando la expresión (3.12), la velocidad límite de caída será:

$$v_L = \frac{F_e}{\beta} = \frac{(m - m_f)g}{\beta}$$

donde m es la masa de la partícula, m_f es la masa del líquido contenido en el volumen que ocupa la partícula y β es el coeficiente de rozamiento. Para una partícula de forma aproximadamente esférica β viene dada por la fórmula de Stokes, (3.13), y la velocidad límite resulta (ecuación (3.14)):

$$v_L = \frac{2R^2(\rho - \rho_f)g}{9\eta}$$

La simple sedimentación diferencial podría ser ya un procedimiento de separación identificando las distintas especies según fueran llegando al fondo o siguiendo el proceso de sedimentación por medios ópticos, aunque para cuerpos de dimensiones subcelulares ese proceso sería muy lento. Las centrífugas son aparatos que permiten acelerar el proceso y repetirlo modificando las condiciones iniciales al generar, mediante giros alrededor de un eje, aceleraciones que pueden ser mucho mayores que la de la gravedad. Una pequeña centrífuga de mesa con un rotor que gire a 3.000 revoluciones por minuto y tenga un brazo de unos 5 cm puede generar aceleraciones del orden de 500 g, mientras que existen centrífugas capaces de llegar hasta las 500.000 g.

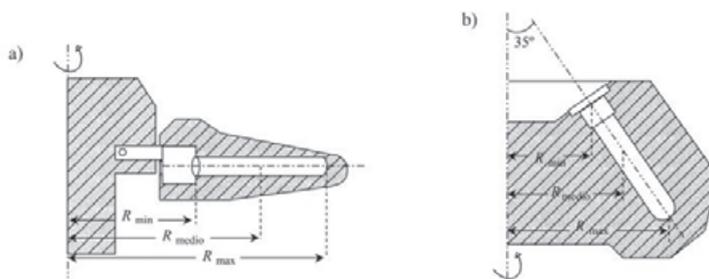


Fig. 3.16. a) Centrífuga con rotación en el plano horizontal.
b) Centrífuga con rotación inclinada un ángulo de 35° con la vertical.

Una centrífuga es un dispositivo como el de la figura 3.16a en el que un rotor gira en el plano horizontal con uno o varios tubos sujetos a lo largo de su circunferencia que contienen la solución formada por el líquido solvente y el soluto que se quiere analizar. Si nos fijamos en una de las partículas, resulta que no está sujeta a ninguna fuerza salvo la de rozamiento y es el líquido el que está obligado a seguir la trayectoria que marca el movimiento del tubo. Si no existiera rozamiento, la trayectoria, respecto de la mesa sobre la que se apoya la centrífuga, sería una línea recta, pero respecto del líquido y el tubo que lo contiene, se está moviendo hacia el fondo del tubo con una aceleración igual en módulo, y contraria en sentido, a la aceleración centrípeta (ver la figura 3.17). A esta aceleración respecto del líquido en movimiento y contraria a la centrípeta es a la que hemos llamado aceleración centrífuga.

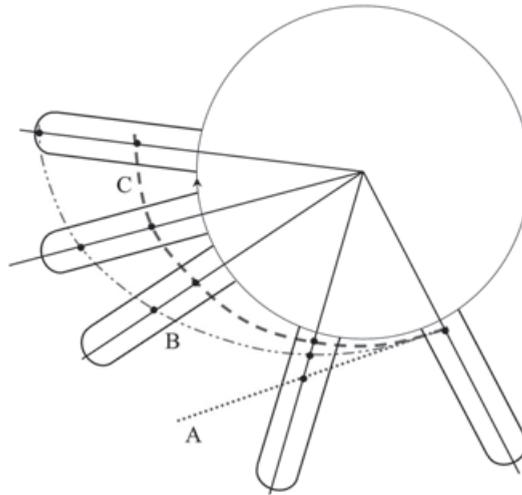


Fig. 3.17. Trayectoria de una partícula contenida en un recipiente que gira. Caso A: sin rozamiento; caso B: con rozamiento moderado de la partícula en el fluido del recipiente; caso C: con más rozamiento.

Nótese que el sistema de referencia ligado al conjunto de líquido y tubo en rotación no es inercial, por lo que, en ese sistema, no se cumplen las leyes de Newton tal y como han sido enunciadas en el capítulo precedente. La trayectoria seguida por la partícula no es rectilínea, como correspondería a un cuerpo libre, sino curva, lo que implica que debe actuar sobre ella una fuerza que es, precisamente, la fuerza centrífuga. **A este tipo de fuerzas, que no son reales en sentido estricto pero aparecen cuando nos situamos en un sistema de referencia no inercial, se les llama fuerzas ficticias.** Así, a todos los efectos, y respecto de un observador ligado al líquido, la partícula se movería como si hubiera una fuerza tirando hacia el fondo del tubo y generando una aceleración igual a la aceleración centrífuga. **Si no hubiera rozamiento, se produciría una sedimentación a gran velocidad e igual para todas las partículas.** La presencia de rozamiento cambia la situación, ya que las trayectorias respecto de la mesa en la que está apoyada la centrífuga no son rectas, sino que se curvan y el grado de curvatura depende de la fuerza de fricción, distinta para cada clase de partícula. La sedimentación es ahora diferencial.

Normalmente la velocidad de sedimentación en la gravedad terrestre es minúscula debido al pequeño tamaño de los fragmentos que sedimentan y a la gran fricción que sufren, tal y como hemos visto anteriormente en el caso de un glóbulo rojo. La centrífuga sirve, por tanto, para crear un campo de fuerzas muy superior al gravitatorio y acelerar la separación de los distintos corpúsculos en función de su tamaño.

Por ejemplo, para una frecuencia de rotación de 18.000 revoluciones por minuto y a una distancia de 9 cm del eje de giro, la aceleración centrífuga generada es:

$$a = \omega^2 R = \left(2\pi \frac{18.000}{60} \right)^2 \times 0,09 = 3,2 \times 10^5 \text{ m/s}^2 \approx 32.600 \text{ g}$$

Se llama campo centrífugo relativo (RCF, de Relative Centrifuge Field) a la aceleración obtenida en un punto de la centrífuga en unidades de g. En este caso, el RCF sería de 32.600. **El efecto de la centrífuga es, por tanto, equivalente a crear un campo gravitatorio muy grande en el que estudiar la sedimentación diferencial de diferentes corpúsculos en un líquido bajo la acción de dicho campo.** De esta forma se acortan considerablemente los tiempos de sedimentación.

Las técnicas de separación por centrifugación más usuales son:

1. Por velocidad de sedimentación partiendo de una mezcla de partículas o macromoléculas homogéneamente distribuidas en un medio viscoso. Bajo la influencia del RCF, cada partícula (células, trozos de célula, núcleos, mitocondrias, ribosomas, macromoléculas, etc.) sedimenta con una velocidad característica, depositándose en el fondo del tubo primero las más grandes, aunque la muestra de estas últimas así obtenida siempre estará contaminada por partículas más pequeñas que ya estaban presentes en esa zona al inicio de la centrifugación. Por el contrario, en la parte más alta del tubo puede obtenerse una muestra muy pura de las partículas más ligeras, que son las que sedimentan más lentamente, como puede verse en la figura 3.18.

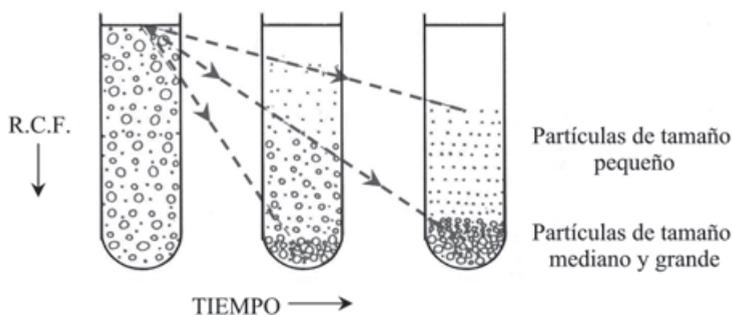


Fig. 3.18. Sedimentación diferencial a partir de una mezcla homogénea de tres especies de partículas en un medio de densidad uniforme.

2. Sedimentación en un gradiente de densidad. En este caso se prepara un medio con densidad variable, creciente hacia el fondo del tubo, de forma que

la densidad máxima es siempre menor que la de las partículas en suspensión para que se produzca la sedimentación. Se parte de la mezcla en la parte superior del tubo y, de nuevo, la diferente velocidad de sedimentación hace que las partículas se vayan diferenciando en capas que luego pueden ser separadas y analizadas.

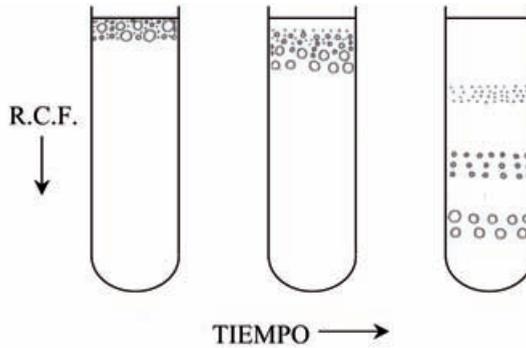


Fig. 3.19. Sedimentación diferencial en un medio de densidad variable (siempre menor que la densidad de las partículas). La separación se efectúa por la distinta velocidad de sedimentación.

3. Centrifugación isopícnica, que consiste en preparar un gradiente de densidades tal que cubra todas las densidades de la mezcla a analizar. Bajo la acción del RCF, las distintas partículas se van moviendo hasta llegar a la zona en la que su densidad iguala a la del medio líquido, en cuyo caso la velocidad límite es cero. La situación de equilibrio es, por lo tanto, una separación en zonas por densidad. Partículas de distinto tamaño pero de la misma densidad acabarán por coincidir en la misma zona, aunque se desplazan a la zona de equilibrio con distinta velocidad.

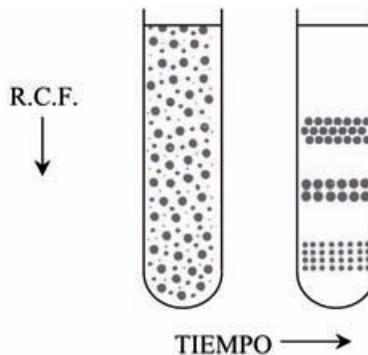


Fig. 3.20. Sedimentación isopícnica. Las distintas especies acaban situándose en zonas del fluido de densidad igual a la de las partículas.

Veamos ahora brevemente los parámetros básicos del proceso de centrifugación para el primer caso de densidad uniforme. La fuerza efectiva sobre una

partícula de masa m en un medio que gira con velocidad angular ω a una distancia r del eje de giro será:

$$F = m_{ef} \omega^2 r$$

donde m_{ef} tiene ya en cuenta el empuje de Arquímedes y será, por tanto, la masa de la partícula menos la masa del líquido que ocupa el mismo volumen de la partícula:

$$m_{ef} = m - m_f = m \left(1 - \frac{m_f}{m}\right) = m \left(1 - \frac{V \times \rho_f}{V \times \rho}\right) = m \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right)$$

donde V es el volumen que ocupa la partícula y ρ_f es la densidad del fluido solvente. A la velocidad límite de sedimentación se llegará cuando la fuerza de rozamiento iguale a la fuerza efectiva, es decir:

$$m \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right) \omega^2 r - \beta v_L = 0$$

Se llama coeficiente de sedimentación, s , a la velocidad de sedimentación dividida por la aceleración, es decir:

$$s = \frac{v_L}{\omega^2 r} = \frac{m \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right)}{\beta} \quad (3.19)$$

El coeficiente de sedimentación tiene dimensiones de tiempo (velocidad partido por aceleración) y su unidad es el Svedberg, que es igual a 10^{-13} segundos.

De la ecuación (3.19) se sigue que el coeficiente de sedimentación es una característica de cada corpúsculo y del medio líquido en el que se mueve. Medir dicho coeficiente equivale, en consecuencia, a identificarlo a través de sus propiedades de sedimentación en un medio viscoso.

Ejemplo. El coeficiente de sedimentación de un ribosoma. Consideremos un ribosoma de *E. coli*. Dada su forma globular le aplicaremos las expresiones válidas para una esfera cuyo diámetro es del orden de $1,8 \times 10^{-8}$ m y cuya masa es igual a $5,0 \times 10^{-21}$ kg. Para el movimiento de este corpúsculo en agua, el coeficiente β será:

$$\beta = 6\pi R\mu = 6\pi \times 0,9 \times 10^{-8} \times 10^{-3} = 1,7 \times 10^{-10} \text{ kg/s}$$

y el coeficiente de sedimentación, tomando una densidad del ribosoma de $1,35 \text{ g/cm}^3$.

$$s = \frac{m(1 - \frac{\rho_f}{\rho})}{\beta} = \frac{5 \times 10^{-21} \times (1 - \frac{1}{1,35})}{1,7 \times 10^{-10}} = 0,76 \times 10^{-11} \text{ s} = 76 \text{ Svedberg}$$

La velocidad a la que se moverá este orgánulo en agua dependerá de la aceleración generada en la centrífuga. De la ecuación (3.19) se sigue que:

$$v_L = s \times a_{\text{centrífuga}}$$

y si queremos que esa velocidad sea del orden de un centímetro por hora, de forma que podamos separarlo de otros componentes celulares tras unas pocas horas de centrifugación, la aceleración necesaria será:

$$a_{\text{centrífuga}} = \frac{v_L}{s} = \frac{10^{-2}}{3.600} \times \frac{1}{76 \times 10^{-13}} = 360.000 \text{ m/s}^2 = 36.700 \text{ g}$$

lo que demuestra la necesidad de enormes aceleraciones y frecuencias en las centrífugas. Si esa aceleración quiere conseguirse a una distancia de 10 cm del eje de giro, la velocidad angular del rotor será:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{\text{centrífuga}}}{r}} = \sqrt{\frac{360.000}{0,10}} = 1.900 \text{ rad / s}$$

y la frecuencia:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 300 \text{ rev/s} = 18.000 \text{ rev/min}$$

De la misma forma que un ribosoma de *E. Coli* tiene un coeficiente de sedimentación en agua del orden de 76 Svedberg, otros componentes celulares o moleculares tienen coeficientes de sedimentación característicos. Por ejemplo, el de una molécula de hemoglobina es del orden de 7 Svedberg, el del ARNm es de 12 Svedberg y el de un virus de la polio es de 120 Svedberg. Si consideramos este último caso, su velocidad en la misma centrífuga del ejemplo anterior será:

$$v_L = s \times a_{\text{centrífuga}} = 120 \times 10^{-13} \times 360.000 = 4,3 \times 10^{-6} \text{ m/s}$$

$$v_L = 4,3 \times 10^{-6} \times 100 \times 3.600 = 1,55 \text{ cm/h}$$

es decir, si al principio ambos componentes, ribosomas y virus, estaban mezclados, en la centrífuga que estamos considerando los virus se separarán de los ribosomas a razón de medio centímetro por hora.

Para determinar la naturaleza de una macromolécula o componente celular lo básico es, por lo tanto, medir su coeficiente de sedimentación. Este parámetro puede obtenerse a partir de la distancia recorrida por la molécula o el orgánulo de que se trate en función del tiempo, ya que:

$$s = \frac{v_L}{\omega^2 r} = \frac{1}{\omega^2 r} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\omega^2} \frac{d(\ln r)}{dt} \quad (3.20)$$

y, por lo tanto, dibujando en un gráfico el logaritmo neperiano de la distancia al eje de giro que va alcanzando una partícula en función del tiempo, la pendiente de la recta aproximada que se obtiene es el producto de ω^2 , que es una característica de la centrífuga, por el coeficiente de sedimentación.

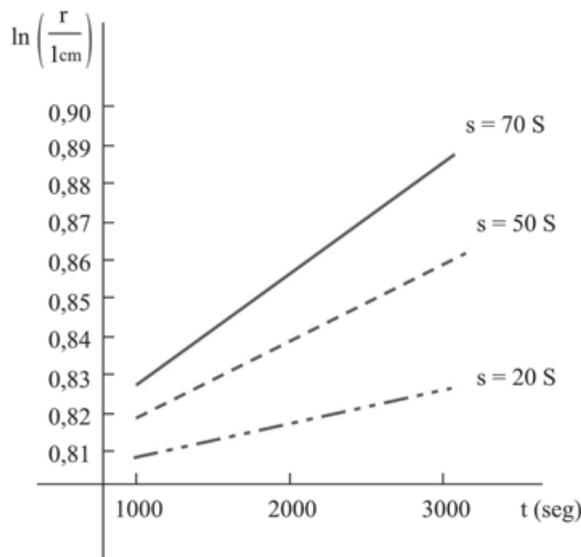


Fig. 3.21. Determinación experimental de los coeficientes de sedimentación. Cada especie de corpúsculo (célula, proteína, fragmento de membrana, orgánulo, etc.) está caracterizada por un coeficiente de sedimentación específico.

Observación. El movimiento de los corpúsculos en la centrífuga. El movimiento de las partículas en el líquido hacia el fondo del tubo no es uniforme, ya que la velocidad límite es proporcional a la aceleración centrífuga y ésta va aumentando según aumenta la distancia al eje de giro. Será un movimiento acelerado cuya naturaleza puede determinarse a partir de la ecuación (3.20):

$$d(\ln r) = s\omega^2 dt$$

$$r = r_0 e^{s\omega^2 t} \quad (3.21)$$

donde r_0 es la posición en el momento inicial. Es decir, las partículas en las centrífugas se desplazan hacia el fondo de los tubos con un alejamiento del eje de giro que crece exponencialmente con el tiempo. Para tiempos no muy grandes, el exponente $s\omega^2 t$ puede ser mucho menor que 1, en cuyo caso la exponencial en (3.21) puede aproximarse por los dos primeros términos de su desarrollo en serie:

$$r \approx r_0(1 + s\omega^2 t) = r_0 + r_0 s\omega^2 t = r_0 + v_L t$$

donde v_L es la velocidad límite en el punto inicial r_0 y el movimiento es uniforme. Para el caso del ribosoma en la centrífuga del párrafo anterior, tendremos:

$$s\omega^2 t = 76 \times 10^{-13} \times (1.900)^2 t = 2,7 \times 10^{-5} t$$

que es menor que 1 para valores de t de hasta 3 y 4 horas.

3.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 3.1 Sea un sistema de dos masas m_1 y m_2 separadas entre sí por una distancia D . Encontrar, sobre la línea que las une, la distancia d entre la masa m_2 y el punto en el cual la fuerza gravitatoria sobre un cuerpo cualquiera es nula debido a que las atracciones ejercidas por las dos masas se compensan exactamente (punto de Lagrange). Aplicarlo al caso del sistema Sol-Júpiter y Tierra-Luna.

Datos:

$$\frac{m_{\text{Sol}}}{m_{\text{Júpiter}}} = 1.000; \quad \frac{m_{\text{Tierra}}}{m_{\text{Luna}}} = 83; \quad D_{\text{Sol-Júpiter}} = 780 \text{ Mkm}; \quad D_{\text{Tierra-Luna}} = 390.000 \text{ km}$$

Sol.:

$$d = \frac{D}{1 + \sqrt{m_1 / m_2}}; \quad \text{Sol - Júpiter : } d = 0,03D = 23 \text{ Mkm}; \quad \text{Tierra - Luna : } d = 0,10D = 39.000 \text{ km}$$

Ejercicio 3.2 Un cometa perteneciente a la nube de Oort se encuentra girando alrededor del Sol en una trayectoria circular de 20.000 UA de radio. ¿Cuál será su periodo de rotación? ¿Y a qué velocidad se mueve? (la Unidad Astronómica (UA) es la distancia media entre la Tierra y el Sol y es igual a 150 Mkm)

$$\text{Sol.: } T_{\text{cometa}} = 2,8 \times 10^6 \text{ años}; \quad v = 214 \text{ m/s}$$

Ejercicio 3.3 Una persona se encuentra en el interior de una rueda de 10 m de radio que gira verticalmente tal y como ilustra la figura 3.22. ¿A qué velocidad y frecuencia tiene que girar la rueda para que en el punto más alto la persona tenga sensación de ingravidez?

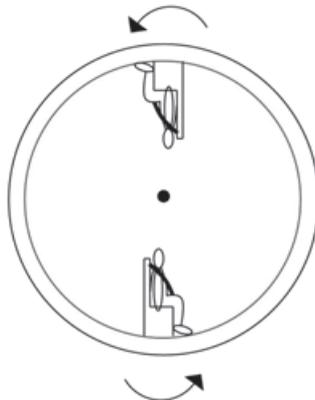


Fig. 3.22. Rueda giratoria en el plano vertical.

Sol.: $v = 9,9 \text{ m/s}$; $f = 9,45 \text{ rev/min}$

Ejercicio 3.4 Una persona cuya masa es 80 kg se encuentra en un ascensor. Determinar la fuerza que ejerce el piso sobre la persona cuando:

1. El ascensor asciende con velocidad constante
2. El ascensor desciende con velocidad constante
3. El ascensor asciende con una aceleración constante de 3 m/s^2
4. El ascensor desciende con una aceleración constante de 3 m/s^2
5. El ascensor cae libremente

Sol.: 1) 800 N; 2) 800 N; 3) 1.040 N; 4) 560 N; 5) 0 N

Ejercicio 3.5 En el dispositivo de la figura 3.23, calcular la masa m que mantiene en equilibrio la masa $M = 100 \text{ kg}$. Calcular las fuerzas de contacto del techo en los puntos A y B.

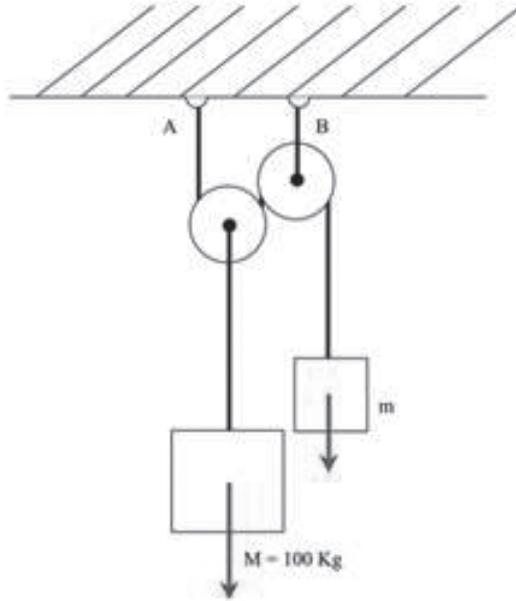


Fig. 3.23. Conjunto de dos poleas fijas al techo y dos masas en equilibrio.

Sol.: $m = 50 \text{ kg}$; $F_A = 490 \text{ N}$; $F_B = 980 \text{ N}$

Ejercicio 3.6 Un bloque de hierro de 7 kg de masa desliza sobre una mesa horizontal arrastrada por el peso de otra masa de 2 kg que cuelga verticalmente de una cuerda unida al bloque y pasa por una polea sin masa ni rozamiento apreciable, según la disposición de la figura 3.24. Si el coeficiente de rozamiento dinámico entre el bloque que desliza y la mesa es $\mu = 0,15$, hallar la tensión de la cuerda.

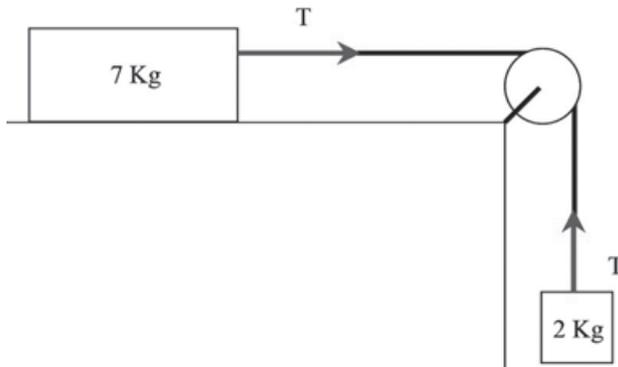


Fig. 3.24. Sistema de dos masas unidas, una de las cuales desliza sobre una superficie horizontal con rozamiento por efecto del peso de la otra.

Sol.: $T = 17,5 \text{ N}$

Ejercicio 3.7 *Considérese una masa m que desliza sobre el suelo con un coeficiente de rozamiento dinámico μ . Se arrastra la masa con ayuda de un tirante que forma un ángulo con la horizontal tal como muestra la figura 3.25. Para el caso de movimiento uniforme, dibujar las fuerzas que actúan sobre la masa m y calcular la fuerza T con la que hay que tirar para mantener el movimiento.*

Hacer lo mismo pero para el caso en el que se empuja la masa, en vez de tirar de ella, y demostrar que empujando es preciso siempre hacer más fuerza que tirando. Argumentar cualitativamente la razón de esta diferencia.

Aplicarlo a una masa de 50 kg, un coeficiente de rozamiento $\mu = 0,7$ y un ángulo $\alpha = 30^\circ$.

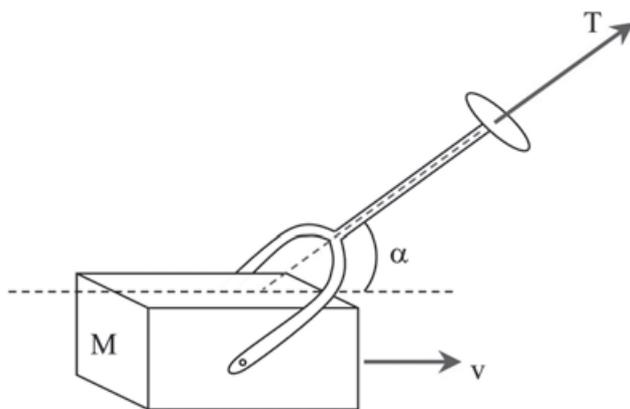


Fig. 3.25. Masa que desliza sobre el suelo, con rozamiento, por la acción de un tirante que forma un cierto ángulo con la horizontal.

$$\text{Sol.: Tirar: } T = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \operatorname{sen} \alpha}; \quad T = 282 \text{ N}$$

$$\text{Empujar: } T = \frac{\mu mg}{\cos \alpha - \mu \operatorname{sen} \alpha}; \quad T = 665 \text{ N}$$

Ejercicio 3.8 *Calcular el diámetro que debe tener un paracaídas circular para que una persona de 80 kg de peso llegue al suelo con una velocidad de 3 m/s. Tomar el valor $C_A = 1$ para el coeficiente de arrastre.*

$$\text{Sol.: } d = 2R = 13,3 \text{ m}$$

Ejercicio 3.9 *Calcular la velocidad límite de caída en aire de una gota de agua de 1 mm de radio tomando la fuerza de fricción proporcional al*

cuadrado de la velocidad y un coeficiente de arrastre C_A igual a 0,5. Calcular el número de Reynolds asociado a este movimiento ($\mu_{\text{aire}} = 1,8 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{ s}^{-1}$).

Sol.: $v_L = 6,46 \text{ m/s}$; $N_R = 450$

Ejercicio 3.10 Calcular la velocidad límite de caída de la gota de agua del ejercicio anterior en la atmósfera de Marte.

Datos: densidad de la atmósfera en Marte = $0,015 \text{ kg/m}^3$; gravedad = $0,38 \times g$

Sol.: $v_L = 36,4 \text{ m/s}$

Ejercicio 3.11 Calcular la velocidad de caída de una gota de lluvia de 10^{-2} mm de radio en aire suponiendo que es aplicable la ley de Stokes. Verificar también que el número de Reynolds asociado es menor que 1. Calcular a partir de qué radio esta aproximación ya no es válida ($\rho_{\text{aire}} = 1,25 \text{ kg/m}^3$; $\mu_{\text{aire}} = 1,8 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \text{ s}^{-1}$).

Sol.: $v_L = 1,2 \text{ cm/s}$; $N_R = 0,0083$; $R_{\text{máx}} = 4,9 \times 10^{-2} \text{ mm}$

Ejercicio 3.12 En una centrífuga que gira con una frecuencia de 40.000 rev/min depositamos hemoglobina en agua a una distancia de 10 cm del eje de rotación. Calcular el tiempo necesario para que la hemoglobina se desplace 1 cm. Verificar que el coeficiente de sedimentación es de 7 Svedberg, tal y como se afirma en el texto. (La molécula de hemoglobina es globular, con un radio del orden de 3 nm y una densidad de $1,34 \text{ g/cm}^3$).

Sol.: $\Delta t \approx 8.300 \text{ s} \approx 2 \text{ h } 18 \text{ min}$

Ejercicio 3.13 Calcular la frecuencia que debe tener una centrífuga para que un glóbulo rojo situado a 6 cm del eje de giro se desplace 2 cm en agua al cabo de 1 minuto de funcionamiento. (El glóbulo rojo tiene un radio de $2 \mu\text{m}$ y una densidad de $1,3 \text{ g/cm}^3$)

Sol.: $f = 1.400 \text{ rev/min}$

3.6 Referencias

Benedek, G. B. & Villars, F. M. H. *Physics, with illustrative examples from Medicine and Biology*. Addison Wesley, 1973

- Bennet-Clark, H. C. & Alder, G. M. "The effect of air resistance on the jumping performance of insects". *J. Exp. Biol.* **82** (1979) 105
- Elert, G. *Centripetal Force*. The Physics Hypertextbook, 2002
- Goodwin, T. W. (ed.). *Instrumentation in Biochemistry*. Academic Press, 1966
- Hanrahan, T. & Carpenter, C. "Taking the plunge". *Scientific American*, Nov., 2001
- Krauss, L. M. *The Fifth Essence*. Basic Books Inc, 1989
- McCall, J. S. & Potter, B. J. *Ultracentrifugation*. Baillière Tindall, 1973
- Purcell, E. M. "Life at Low Reynolds Number". *American Journal of Physics* **45** (1977) 3
- Rickwood, D. *Centrifugation: A practical approach*. IRL Press, 1984
- Schmidt-Nielsen, K. *Scaling. Why is animal size so important?* Cambridge University Press, 1984

Capítulo 4. Bioestática y locomoción

4.1 Momento angular

4.1.1 Definición

Introduciremos en este capítulo una nueva variable cinemática, llamada momento angular, relacionada con las rotaciones, que se conserva en ciertas condiciones muy frecuentes en el mundo físico. Definiremos, en primer lugar, el momento angular respecto de un punto O para una partícula de masa m que se mueve con una velocidad \vec{v} del siguiente modo:

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (4.1)$$

Donde \vec{r} es el vector posición de la partícula respecto del punto en cuestión y el símbolo “ \times ” entre dos vectores representa el producto vectorial.

Por lo tanto, **el momento angular de una partícula es siempre perpendicular a su velocidad y a su vector posición**. Si la trayectoria es plana, podemos escoger el origen de coordenadas en el plano que la contiene y el momento angular será siempre perpendicular a dicho plano.

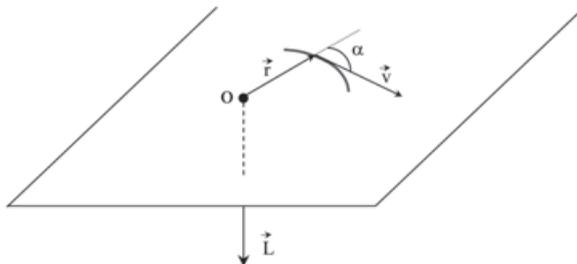


Fig. 4.1. Momento angular \vec{L} de una partícula cuya posición está caracterizada por el vector posición \vec{r} y se mueve con una velocidad \vec{v} , respecto del punto O . El momento angular es perpendicular al plano que contiene \vec{r} y \vec{v} .

Las dimensiones del momento angular vienen dadas por la expresión:

$$[L] = ML^2T^{-1}$$

y sus unidades serán $kg \times m^2 s^{-1}$.

Si se calcula el momento angular respecto de un punto de la recta que contiene al vector velocidad, entonces el momento angular respecto de dicho punto es cero al ser el vector posición paralelo o antiparalelo a la velocidad.

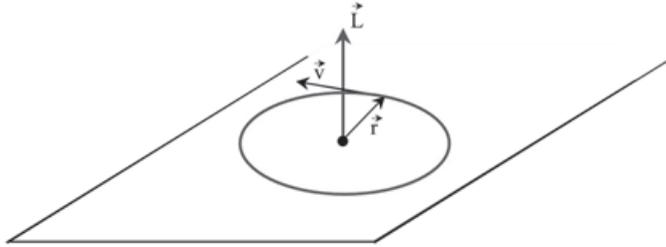


Fig. 4.2. Movimiento circular: dirección y sentido del momento angular.

Para el caso de un movimiento circular contenido en el plano horizontal, a lo largo de una circunferencia de radio R , escogeremos el origen de coordenadas en el centro de la circunferencia y el momento angular será un vector hacia arriba si el movimiento tiene lugar en el sentido contrario al de las agujas de un reloj y hacia abajo si el movimiento tiene lugar en el sentido de las agujas de un reloj, como puede apreciarse en la figura 4.2. A lo largo de la trayectoria circular, el radio vector es siempre perpendicular a la velocidad, por lo que el módulo del producto vectorial será simplemente el producto de ambos módulos:

$$L = mRv = mR^2\omega \quad (4.2)$$

Si el movimiento es circular uniforme, v y ω son constantes, por lo que el módulo del momento angular es también constante.

Para un conjunto de partículas, el momento angular total se define como la suma de los momentos angulares de cada una de ellas respecto de un mismo punto O :

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$$

Y para un cuerpo continuo, la definición es la generalización de la expresión anterior:

$$\vec{L} = \int_V dm \vec{r} \times \vec{v}$$

y tomando $dm = \rho dV = \rho d^3\vec{r}$, donde ρ es la densidad, obtenemos:

$$\vec{L} = \int_V \rho \vec{r} \times \vec{v} d^3\vec{r}$$

extendiéndose la integral a todo el volumen del cuerpo.

4.1.2 Momento de inercia

Consideremos un cuerpo o conjunto de partículas moviéndose alrededor de un eje, que escogeremos como eje Z , con velocidad angular constante. Fijando el origen de coordenadas en un punto O cualquiera del eje y centrándonos en una de las partículas, vemos que el movimiento de ésta es circular uniforme alrededor del eje en cuestión con una velocidad angular ω tal que:

$$v = R\omega = r\omega \sin\varphi$$

tal y como vemos en la figura 4.3.

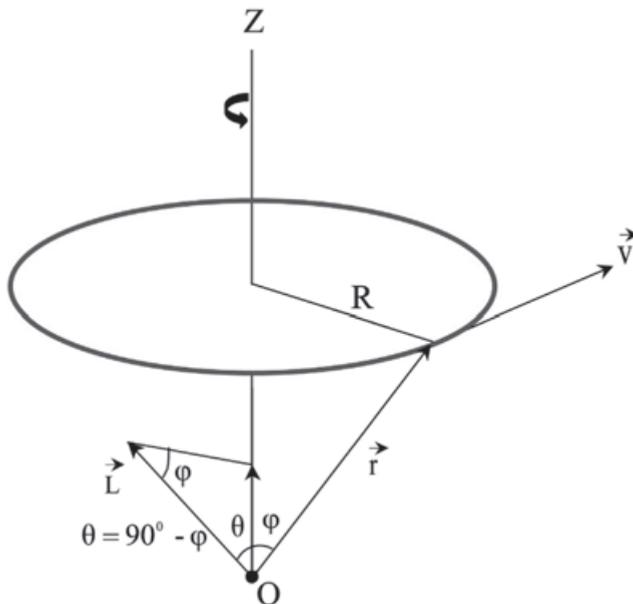


Fig. 4.3. Movimiento de rotación alrededor de un eje

En cada instante, el momento angular respecto del origen será un vector perpendicular al plano que forman r y v y, por lo tanto, formando un ángulo $\theta = 90^\circ - \varphi$ con el eje Z . Cuando la partícula se mueve, el momento angular va girando alrededor del eje Z formando un cono de ángulo θ . La única componente del momento angular que se mantiene constante a lo largo del tiempo es la componente z , mientras que las componentes perpendiculares

al eje Z se cancelan a lo largo de un giro completo. **Llamaremos momento angular respecto de un eje a su componente a lo largo de dicho eje.** En el caso que nos ocupa:

$$L_z = L \operatorname{sen} \varphi = mrv \operatorname{sen} \varphi = mRv = mR^2 \omega$$

siendo R la distancia en perpendicular desde la partícula al eje. Nótese que **el momento angular así definido no depende del punto respecto del cual se ha calculado, siempre que esté contenido en el eje de giro, sino sólo de la distancia en perpendicular entre éste y la partícula.** Para un sistema rígido de muchas partículas girando alrededor de un eje, todas ellas se mueven con la misma velocidad angular, por lo que:

$$L_z = \omega \sum_{i=1}^N m_i R_i^2$$

y para un cuerpo continuo:

$$L_z = \omega \int dm R^2 = \omega \int \rho R^2 d^3 \vec{r}$$

En todos los casos, la componente del momento angular total a lo largo del eje de giro es igual a la velocidad angular multiplicada por una cantidad, que llamaremos momento de inercia respecto de dicho eje:

$$L_z = I \omega \quad (4.3)$$

siendo:

$$I = \sum_{i=1}^N m_i R_i^2 \quad (4.4)$$

Las dimensiones del momento de inercia son:

$$[I] = ML^2$$

Para el caso de una sola partícula, la suma en la expresión (4.4) es un solo sumando, mientras que si se trata de un cuerpo continuo, la suma es una integral. **El momento de inercia de un cuerpo respecto de un eje es una cantidad intrínseca, que no depende de su estado de movimiento, sino sólo de su forma, de su densidad y del eje de giro.** La expresión (4.3) es similar a la que define el momento de una partícula, $\rho_z = mv_z$, pero para los giros alrededor de un eje. El momento o cantidad de movimiento se sustituye por el momento angular, la masa por el momento de inercia, y la velocidad lineal por la velocidad angular.

Ejemplo. Calculemos el momento de inercia de una varilla homogénea, de masa M y longitud L respecto de un eje que pasa por uno de sus extremos y es perpendicular a la línea de la varilla. Sea λ la densidad lineal, definida de forma tal que la masa contenida en un elemento infinitesimal de longitud dx es $dm = \lambda dx$. En una varilla homogénea la densidad lineal es la misma en todos sus puntos, por lo que $M = \lambda L$ e:

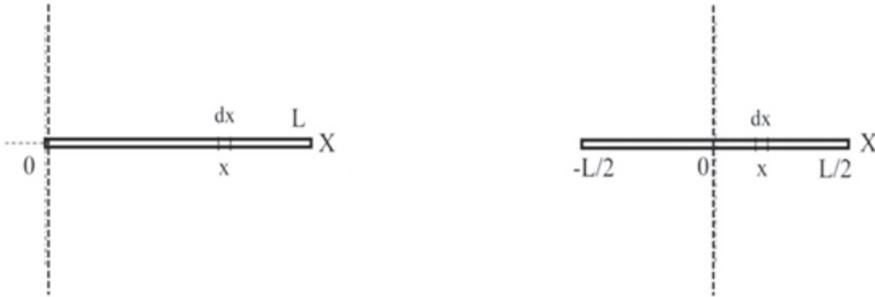


Fig. 4.4. Varilla homogénea de longitud L y giro alrededor de un eje perpendicular a la línea que la contiene, a) que pasa por uno de sus extremos, b) que pasa por su centro de masas.

$$I = \int_0^L x^2 dm = \lambda \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3} \lambda L^3 = \frac{1}{3} ML^2$$

Ejemplo. Podemos calcular, de forma análoga al caso anterior, el momento de inercia de la varilla homogénea respecto de un eje que pasa por su centro y es perpendicular a la línea que contiene a la varilla:

$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dm = \lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 dx = \lambda \frac{1}{3} \left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8} \right) = \frac{1}{12} \lambda L^3 = \frac{1}{12} ML^2$$

El momento de inercia de la barra respecto del eje que pasa por su centro de masas es menor que el de la misma barra respecto de un eje que pasa por uno de sus extremos. Como veremos más adelante, el momento de inercia mide la resistencia al giro de un cuerpo, y esta relación traduce el hecho de que es más fácil hacer girar la barra alrededor de un eje que pasa por su centro que alrededor de uno que pase por uno de sus extremos.

Ejemplo. Una puerta de espesor despreciable respecto de sus otras dos dimensiones puede considerarse como una superposición de varillas, todas de la misma longitud, por lo que su momento de inercia respecto de un eje que pasa por uno de sus bordes será simplemente $I = \frac{1}{3} ML^2$, donde L es la longitud del borde de la puerta perpendicular al eje de giro.

4.1.3 Conservación del momento angular y momento de una fuerza

Veamos ahora en qué condiciones el momento angular de un sistema dinámico es una constante del movimiento. Para ello, como para cualquier otra variable cinemática, tendremos que analizar su variación con el tiempo. Empecemos para el caso de una sola partícula:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times (m\vec{a}) \quad (4.5)$$

El primer término del último miembro de la expresión (4.5) es cero debido a que contiene el producto vectorial de un vector por sí mismo. El resultado final es:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (4.6)$$

Al segundo miembro de la igualdad (4.6) le llamaremos momento de la fuerza \vec{F} respecto del punto O :

$$\vec{\Gamma} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (4.7)$$

El momento de una fuerza respecto de un punto es, por lo tanto, un vector normal al plano que forman la fuerza y el punto, dirigido según la regla del sacacorchos que ya vimos en el primer capítulo: si ponemos el plano en posición horizontal, el momento está dirigido hacia arriba si la fuerza marca un giro alrededor del punto en sentido contrario a las agujas de un reloj y está dirigido hacia abajo si el giro marcado lo es en el sentido de las agujas de un reloj. El módulo del momento es igual a $rF \sin \alpha$, es decir, igual a Fd , donde d es la distancia en perpendicular desde el punto a la recta de acción de la fuerza (véase la figura 4.5).

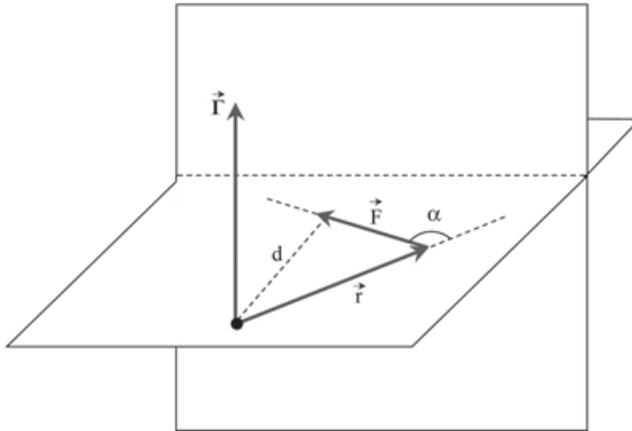


Fig. 4.5. Momento de una fuerza contenida en el plano horizontal.

En lo sucesivo entenderemos siempre que se ha especificado el punto respecto del que estamos calculando momentos angulares y momentos de fuerzas. Las dimensiones del momento de una fuerza son, de la expresión (4.7):

$$[\Gamma] = ML^2T^{-2}$$

Ejemplo. *Calcularemos el momento del peso de un cuerpo de masa igual a 5 kg sujeto en la mano de una persona respecto de los puntos de giro de la muñeca, el codo y el hombro cuando el brazo está extendido en un ángulo de 45° respecto de la vertical.*

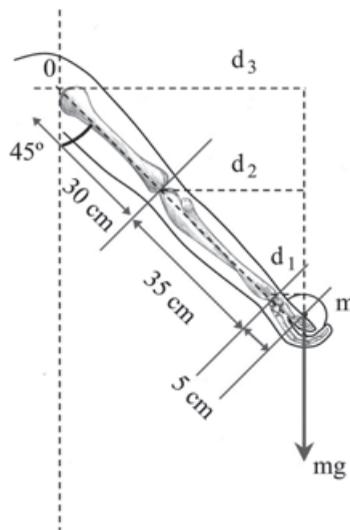


Fig. 4.6. Brazo sujetando un peso en un ángulo de 45° con la vertical.

Las distancias a lo largo del brazo entre el centro del peso y los puntos de giro de la muñeca, el codo y el hombro son, aproximadamente, $l_1 = 5 \text{ cm}$, $l_2 = 40 \text{ cm}$, $l_3 = 70 \text{ cm}$. Las distancias en perpendicular entre esos puntos y la línea de acción de la fuerza (vertical) serán:

$$d_i = l_i \operatorname{sen}45^\circ = \frac{l_i}{\sqrt{2}}$$

es decir, $d_1 = 3,5 \text{ cm}$, $d_2 = 28,3 \text{ cm}$, $d_3 = 49,5 \text{ cm}$. Los momentos de la fuerza serán:

$$\Gamma_i = mgd_i$$

Y, por lo tanto, $\Gamma_1 = 1,7 \text{ kg} \times \text{m}^2 \text{s}^{-2}$, $\Gamma_2 = 13,9 \text{ kg} \times \text{m}^2 \text{s}^{-2}$, $\Gamma_3 = 24,3 \text{ kg} \times \text{m}^2 \text{s}^{-2}$.

De la ecuación (4.6) se sigue que el momento angular se conserva (su derivada respecto del tiempo es cero) cuando el segundo miembro (el momento de la fuerza) es cero, lo que ocurre en dos situaciones posibles:

1. La fuerza es cero.
2. La fuerza no es cero, pero su momento sí lo es.

Así pues, **el momento angular se conserva si la partícula es libre, o bien si la fuerza a la que está sometida tiene siempre la dirección de \vec{r} , en cuyo caso el momento de la fuerza es cero.** A este tipo de fuerzas, que van siempre en la dirección del radio vector (paralelas o antiparalelas al mismo), se les llama centrales y tienen la propiedad de que los cuerpos a ellas sometidos describen trayectorias que conservan el momento angular. La fuerza de la gravedad es central y, por lo tanto, las órbitas de los cuerpos celestes son tales que conservan el momento angular.

4.1.4 Consecuencias de la conservación del momento angular

Partimos de la expresión:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma} \quad (4.8)$$

donde \vec{L} y $\vec{\Gamma}$ son el momento angular y el momento de las fuerzas, respectivamente. Si este último es cero, entonces $\vec{L} = \text{constante}$ y, para el caso de un cuerpo girando alrededor de un eje:

$$I\omega = \text{constante}$$

Supongamos el caso de una persona girando sin rozamiento sobre el suelo (como por ejemplo la patinadora sobre hielo de la figura 4.7).

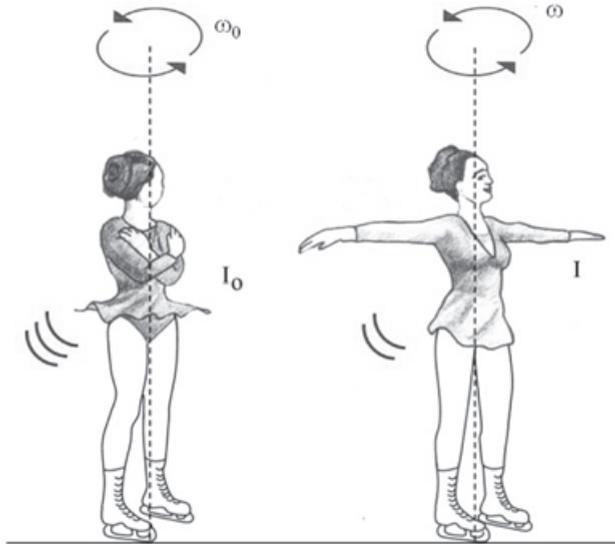


Fig. 4.7. Patinadora cambiando la velocidad de giro por el procedimiento de extender o recoger los brazos, lo que produce un cambio en su momento de inercia respecto al eje de giro.

Como no hay fuerzas externas que actúen sobre ella (su peso es cancelado exactamente por la fuerza de contacto del suelo), el momento angular es constante y, si no altera la disposición de su cuerpo, el momento de inercia no varía, lo que implica que gira con velocidad angular constante. Sin embargo, cuando abre sus brazos o cambia la distribución de masas de su cuerpo, el momento de inercia cambia y la constancia del momento angular implica que la velocidad angular tiene que cambiar. Si el momento de inercia y la velocidad angular iniciales son I_0 y ω_0 , respectivamente, e I y ω las mismas magnitudes tras el cambio de disposición corporal, tendremos:

$$I_0\omega_0 = I\omega \tag{4.9}$$

Ejemplo. Supongamos, para fijar las ideas, que la patinadora tiene los brazos recogidos a lo largo del cuerpo y está girando con una frecuencia de 5 revoluciones por segundo, es decir, ω_0 será de $5 \times 2\pi = 31,4$ radianes por segundo. El momento de inercia del cuerpo, excepto los brazos, lo aproximaremos por el de un cilindro de 1,60 metros de altura y una base circular de unos 10 cm de radio. El volumen de un tal cilindro será:

$$V = \pi R^2 h \approx 0,050 \text{ m}^3$$

lo que, teniendo en cuenta que la densidad del cuerpo humano es prácticamente la del agua, da una masa de unos 50 kg. El momento de inercia de un cilindro alrededor de su eje de simetría es igual a $\frac{1}{2}MR^2$, siendo R el radio de la base (ver el ejercicio 2 de este capítulo). Aproximaremos la contribución de los brazos como si fuera la de dos cuerpos puntuales de 3 kg cada uno situados en el centro de masas de cada brazo. En posición recogida, se encuentran a una distancia de unos 15 cm del eje de giro, por lo que el momento de inercia total será:

$$I_0 = \frac{1}{2} \times 50 \times 0,1^2 + 2 \times 3 \times 0,15^2 = 0,385 \text{ kg} \times \text{m}^2$$

Al extender los brazos aumenta su momento de inercia. Haciendo la aproximación de que el centro de masas de cada uno de los brazos pasa a estar a unos 40 cm del eje de giro, el momento de inercia en esta nueva postura será:

$$I = \frac{1}{2} \times 50 \times 0,1^2 + 2 \times 3 \times 0,4^2 = 1,21 \text{ kg} \times \text{m}^2$$

y de la ecuación (4.9) se deduce que ahora la velocidad de rotación habrá disminuido hasta un valor:

$$\omega = \frac{I_0}{I} \omega_0 = \frac{0,385}{1,21} \times 31,4 = 10,0 \text{ rad/s}$$

es decir, girará a $\frac{10}{2\pi} = 1,6$ revoluciones por segundo, un tercio de la frecuencia que tenía con los brazos recogidos. La simple extensión de los brazos aumenta el momento de inercia y la conservación del momento angular exige que disminuya la velocidad de rotación. Si la patinadora vuelve a plegar los brazos, la velocidad angular aumenta. El procedimiento para modificar la velocidad de rotación en el caso de los patinadores, bailarines o trapecistas se basa, por lo tanto, en la conservación del momento angular.

Cuando el momento de inercia de un cuerpo no cambia y consideramos el giro alrededor de un eje, entonces la ecuación que da la relación entre momento angular y momento de las fuerzas se escribe:

$$\Gamma = \frac{dL}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha \quad (4.10)$$

donde α es la aceleración angular alrededor del eje de giro y la expresión que resulta es en todo similar a la segunda ley de Newton (ecuación (2.1)), sólo que

la fuerza se sustituye por el momento de la fuerza, la masa por el momento de inercia y la aceleración por la aceleración angular. En el caso de rotaciones, la expresión que resulta útil para estudiar la naturaleza del movimiento es, precisamente, la (4.10).

Si la fuerza externa sobre un cuerpo es la de la gravedad, tendremos que la fuerza externa sobre cada partícula de masa m_i que forma parte del cuerpo es:

$$\vec{F}_i^{(e)} = -m_i g \vec{u}_z$$

y el momento total de la fuerza sobre el cuerpo puede escribirse de una forma compacta:

$$\vec{\Gamma} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(e)} = \left(-g \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{u}_z = -g M \vec{r}_{CM} \times \vec{u}_z = \vec{r}_{CM} \times \vec{F}_T^{(e)} \quad (4.11)$$

Siendo:

$$\vec{F}_T^{(e)} = \sum \vec{F}_i^{(e)} = -Mg \vec{u}_z$$

El momento total es, así, igual al momento de la fuerza gravitatoria actuando sobre una partícula cuya masa fuera igual a la masa total del cuerpo situada en su centro de masas.

4.1.5 El gato y los saltos de trampolín

La conservación del momento angular para el caso en que el momento de las fuerzas externas sea cero parece violarse en el caso de los giros que efectúan los saltadores de trampolín cuando están en el aire o los de un gato que siempre cae de pie aun cuando se le haya dejado caer con los pies por alto. Si tomamos el centro de masas del cuerpo como punto respecto del cual calcular momentos, el momento de la fuerza de la gravedad, que es la única que actúa, es cero y no podría haber aceleración angular alrededor de ningún eje que pasara por dicho punto, de acuerdo con las expresiones (4.10) y (4.11). Sin embargo, hay aceleraciones en ambos casos, aunque no una real violación de la conservación del momento angular porque no se trata de cuerpos rígidos, sino que pueden alterar su conformación y, por lo tanto, su momento de inercia, lo que implica variación en la velocidad angular.

Empecemos con un saltador desde un trampolín que impulsa el cuerpo hacia adelante (de frente) o hacia atrás (de espaldas). Las fuerzas de los pies sobre el trampolín, antes de abandonarlo, imprimen un giro al cuerpo con una

velocidad angular asociada a un momento angular que va a lo largo del eje de giro: perpendicular al cuerpo hacia la izquierda del saltador, en el caso de salto hacia adelante, o hacia la derecha, en el caso de salto hacia atrás, según la configuración de la figura 4.8. Una vez en el aire, la velocidad de rotación no se puede alterar si el momento de inercia permanece constante.

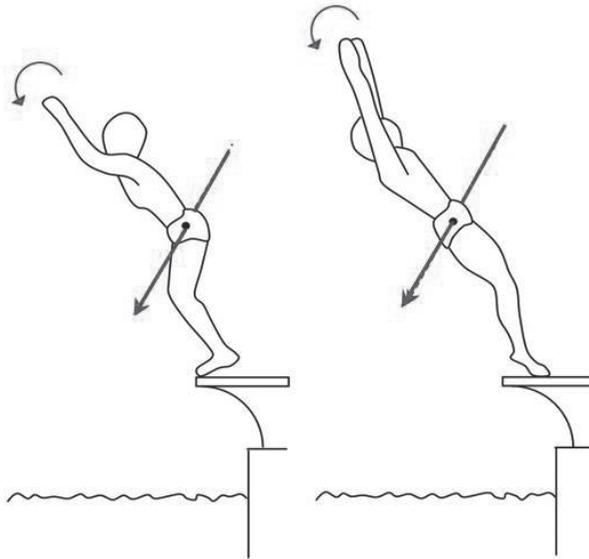


Fig. 4.8. Saltador de trampolín iniciando el giro alrededor de un eje normal al eje del cuerpo hacia delante y hacia atrás.

Así, si el saltador mantiene su cuerpo rígido, normalmente completa una vuelta y media antes de zambullirse (salto mortal), pero puede plegar el tronco, los brazos y las piernas para disminuir su momento de inercia alrededor del eje de giro, con lo que aumentará su velocidad angular y podrá completar dos vueltas y media (doble salto mortal) o más, según puede verse en la figura 4.9, de modo similar a las maniobras de la patinadora vistas anteriormente. Cuando el saltador va a zambullirse en el agua puede estirar completamente su cuerpo, con lo que aumenta su momento de inercia de nuevo, hasta en un factor cinco respecto de la posición completamente plegada, con lo que la velocidad angular disminuye en ese mismo factor y nos da la impresión de que llega al agua prácticamente sin giro.

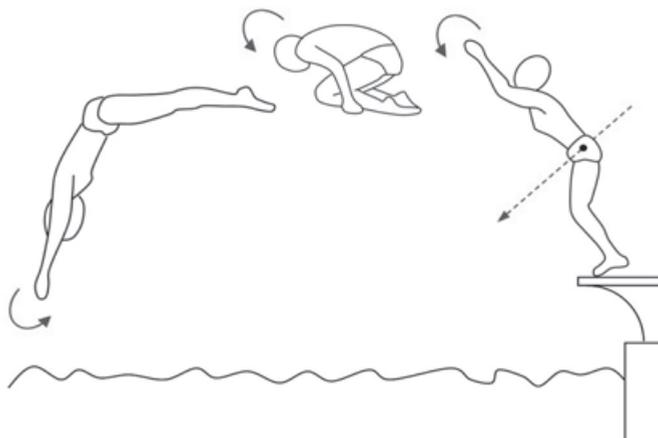


Fig. 4.9. El saltador aumenta la velocidad de giro hacia delante recogiendo el cuerpo y disminuyendo, así, su momento de inercia respecto al eje de giro.

Pero el saltador puede hacer algo más. Mediante movimientos de los brazos y del tronco puede imprimir una rotación alrededor del eje que va de la cabeza a los pies, el llamado giro en tirabuzón, al que está asociado un momento angular dirigido en esa dirección. Si el momento angular inicial iba en la dirección del eje de giro del salto mortal, y el giro alrededor de este eje no se altera, es imposible iniciar el movimiento en tirabuzón. Pero lo que importa es la conservación del momento total, que se puede mantener constante e igual a su valor inicial si se modifica el eje del giro hacia adelante, de forma que la suma del momento angular asociado a este movimiento más el asociado al giro en tirabuzón sea igual, en módulo y dirección, al momento angular con que inició el vuelo. Cuando quiere detener el giro en tirabuzón, el saltador tiene que restablecer la coincidencia entre el eje de giro y el del momento angular inicial, es decir, perpendicular a la dirección de salida del trampolín.

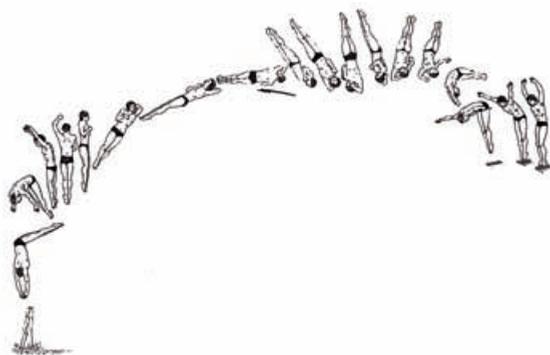


Fig. 4.10. Salto que se inicia como mortal hacia delante al que se imprime un giro en tirabuzón en su parte intermedia. Al final, cesa este último giro y se recupera la rotación pura hacia delante (Frohlich, 1980).

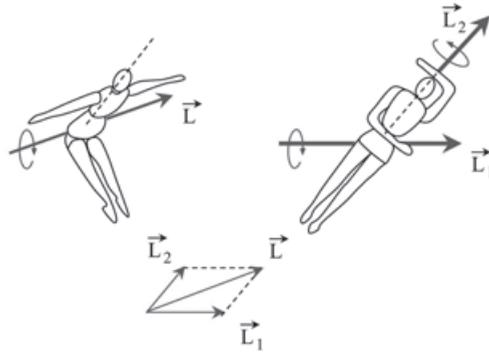


Fig. 4.11. El momento angular se conserva en el salto, lo que implica que, cuando el saltador gira en tirabuzón, el eje de giro hacia delante debe cambiar de forma que la composición de los momentos angulares asociados a los dos giros sea igual al momento angular inicial.

A veces se argumenta que es imposible que pueda realizarse un giro en tirabuzón si en el instante del despegue el saltador no lo ha iniciado ya, gracias a la interacción de los pies con el trampolín. Pero la evidencia empírica, con estudios dinámicos de saltos, ha demostrado que esto no es así, y que el saltador puede iniciar dicho giro en cualquier instante, aun cuando el momento angular con que despegue vaya en la dirección perpendicular a la dirección de inicio del salto, con tal de que altere la dirección del eje del salto mortal de forma que la suma de los dos momentos angulares conserve el valor inicial. Sin embargo, en el salto hacia atrás es más difícil maniobrar, por lo que normalmente el saltador inicia el movimiento en tirabuzón ya desde el trampolín, imprimiendo un giro alrededor del eje longitudinal del cuerpo en los últimos apoyos sobre la tabla.

Más complicado es entender que pueda girar en el aire un gato cayendo de espaldas con momento angular cero (se le deja caer, por ejemplo, con las patas hacia arriba y sin imprimir ningún giro en el momento de la caída). Si el cuerpo del gato se mantuviera rígido, no habría manera de producir el giro, pero éste es posible porque las distintas partes del cuerpo giran a lo largo de ejes distintos, de forma que el vector momento angular total sigue siendo cero a lo largo de toda la caída.

Este fenómeno puede verse con más claridad con ayuda de un modelo en el que el cuerpo está compuesto por dos cilindros unidos por sus extremos y que pueden formar un cierto ángulo entre ellos mientras giran.

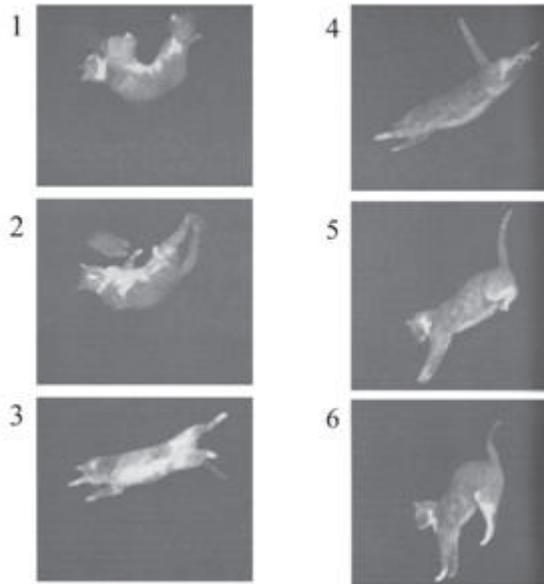


Fig. 4.12. Gato, al que se deja caer con momento angular inicial igual a cero, volteándose mediante giros combinados según se explica en el texto. La caída dura 0,5 segundos y a lo largo de ella recorre 1,2 metros (Frohlich, 1980).

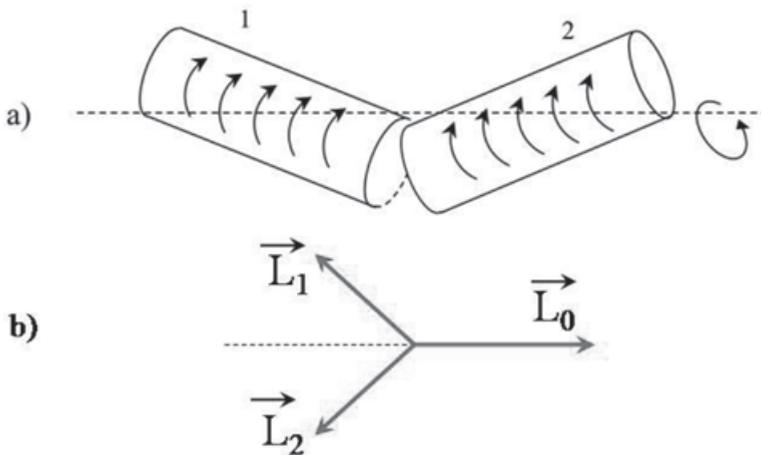


Fig. 4.13. Modelo de rotación de las dos mitades del tronco de un animal sobre sus ejes de simetría y rotación global, en sentido contrario, alrededor del eje horizontal. Esquema de momentos angulares con resultante cero.

Si los dos cilindros giran hacia la derecha alrededor de cada uno de sus ejes de simetría, según se ve en la figura 4.13, la suma de sus dos momentos angulares puede compensarse exactamente con el momento angular asociado al giro en dirección contraria del conjunto de los dos cilindros alrededor del

eje horizontal, que es el eje del cuerpo al inicio de la caída. Así, este último movimiento es posible gracias a los giros alrededor de otros ejes de las dos mitades del cuerpo, manteniéndose el momento angular igual a cero en todo instante.

4.1.6 Equilibrio

Ya hemos demostrado en el capítulo anterior que si la suma de las fuerzas externas sobre un objeto es cero, entonces la aceleración de su centro de masas es cero, por lo que si estaba en reposo sigue, como un todo, en reposo. Pero **un objeto puede girar alrededor de un eje aún cuando su centro de masas permanezca en reposo**. Es el caso de una barra sobre la que actúen dos fuerzas iguales y de sentido contrario pero aplicadas en sus dos extremos.

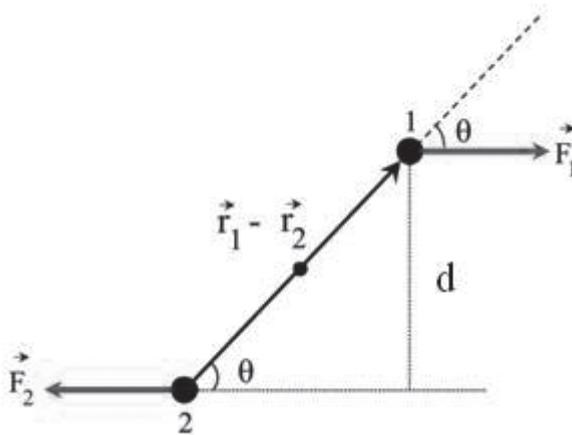


Fig. 4.14. Barra rígida a la que se aplica un par de fuerzas.

La barra girará, entonces, aun cuando su centro de masas (el punto medio si es homogénea) permanezca inmóvil. La razón es que el momento total de las fuerzas externas es distinto de cero y, si el objeto no cambia de forma, su momento de inercia es constante y debe generarse una aceleración angular (véase ecuación (4.10)) que implica que la velocidad angular varía con el tiempo. Es decir, si la barra estaba en reposo, empieza a girar y no está en equilibrio. **Se llama par de fuerzas, precisamente, al momento de dos fuerzas iguales y de sentido contrario actuando a lo largo de rectas distintas sobre un cuerpo rígido**, tal y como se puede ver en la figura 4.14. El par en este caso tendrá la siguiente forma:

$$\vec{\Gamma} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1$$

es decir, es un vector perpendicular al plano que contiene a las dos fuerzas, dirigido hacia adentro en el caso de la figura, y cuyo módulo es:

$$\Gamma = \left| \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \right| F_1 \text{ sen} \theta = dF_1 \tag{4.12}$$

donde d es la distancia en perpendicular entre las dos rectas. Así, **cuando las fuerzas actúan a lo largo de la misma recta, d es cero, lo que implica que el par es cero y no hay giro.** Nótese que el par de fuerzas es independiente del punto escogido como origen para calcular momentos.

De lo dicho anteriormente se deduce que, **para que exista equilibrio estático, deben cumplirse estas dos condiciones:**

1. **La suma total de las fuerzas externas es cero**, lo que asegura que el centro de masas permanece en reposo y no hay movimiento de traslación:

$$\sum \vec{F}^{(e)} = 0$$

2. **La suma total de los momentos de las fuerzas externas es cero**, lo que asegura que no hay movimientos de rotación:

$$\sum \vec{r} \times \vec{F}^{(e)} = 0$$

El caso más sencillo y evidente es un objeto paralelepédico sobre una superficie sólida, como se muestra en la figura 4.15.

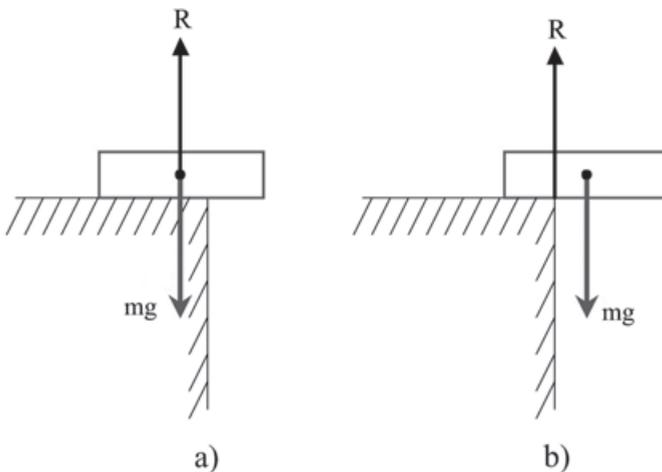


Fig. 4.15. Paralelepípedo sobre una superficie, a) en equilibrio, b) fuera del equilibrio.

La fuerza de la gravedad sobre todas sus componentes produce un efecto equivalente a una sola partícula situada en su centro de masas sobre la que actuaría la fuerza correspondiente a todo el cuerpo. La superficie sólida opone una fuerza de contacto igual en módulo y dirigida hacia arriba, de forma que el cuerpo como un todo permanece inmóvil. Si la vertical del centro de masas está sobre algún punto de la superficie sólida, la fuerza de contacto \vec{R} puede aplicarse en ese mismo punto y entonces también el par de fuerzas asociado al peso y a la fuerza de contacto es cero: no hay giro y el cuerpo está en equilibrio.

Consideremos ahora, sin embargo, el caso en que la vertical del centro de masas esté fuera de la superficie sólida, en la disposición de la figura 4.15.b. Ocurre entonces que la fuerza de contacto \vec{R} se aplica sobre el punto de la superficie más cercano al centro de masas, por lo que no puede estar dirigida a lo largo de la vertical de este último punto. La consecuencia es que el momento total de las dos fuerzas no es cero y se produce un giro. El cuerpo no está en equilibrio. En este caso, el momento total, o par de fuerzas, es un vector normal al plano de la figura, dirigido hacia adentro y con un módulo igual al módulo de la fuerza multiplicado por la distancia entre las rectas a lo largo de las cuales se aplican las dos fuerzas.

Ejemplo. Supongamos tres ladrillos paralelepíedicos, homogéneos e iguales. Estudiemos la configuración de equilibrio en la que el borde de cada uno está separado una distancia igual del borde del ladrillo que tiene debajo, según puede verse en la figura 4.16.

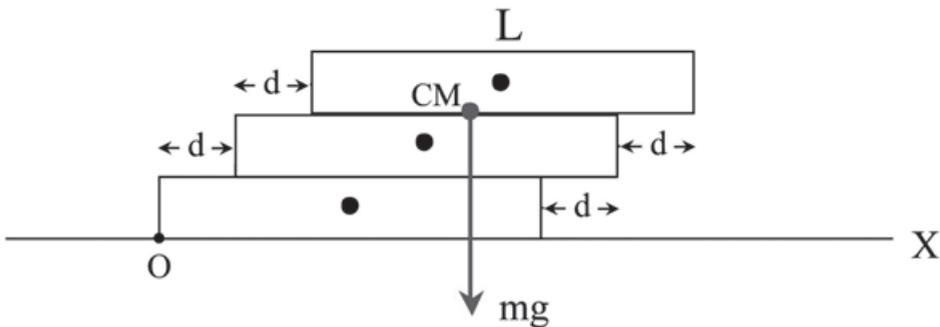


Fig. 4.16. Ladrillos apilados con desplazamientos relativos iguales.

Para que el de más arriba se mantenga en equilibrio sobre el siguiente, basta con que $d < \frac{L}{2}$. El centro de masas del conjunto de estos dos ladrillos estará, respecto del origen de coordenadas, en la posición:

$$x_{CM} = \frac{\left(\frac{L}{2} + 2d\right)M + \left(\frac{L}{2} + d\right)M}{2M} = \frac{L + 3d}{2}$$

y para que estos dos ladrillos se mantengan en equilibrio sobre el tercero es preciso que el centro de masas del conjunto de los dos caiga sobre la superficie de este último, es decir:

$$\frac{L + 3d}{2} < L \Rightarrow d < \frac{L}{3}$$

Las propiedades del equilibrio permiten determinar experimentalmente la posición del centro de masas de un cuerpo irregular. En efecto, coloquemos el cuerpo colgando de un hilo, como en la figura 4.17, en una posición tal que esté en equilibrio.

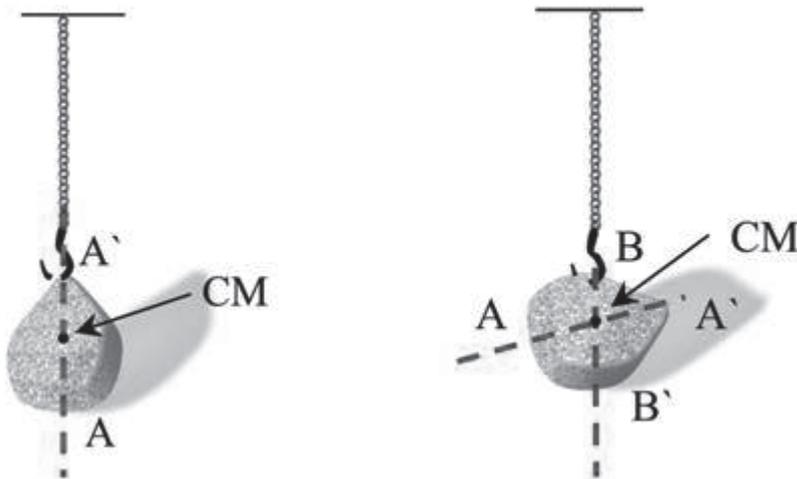


Fig. 4.17. Determinación experimental del centro de masas de un cuerpo irregular suspendido de una cuerda con ayuda de dos posiciones de equilibrio.

Sucede, entonces, que la fuerza de contacto de la cuerda sobre el cuerpo debe estar alineada con el peso aplicado en el centro de masas, tal como muestra la figura 4.17, ya que de otra forma habría un par de fuerzas y el cuerpo giraría. A partir de la posición de equilibrio sabemos, por lo tanto, que el centro de masas está contenido en la línea vertical AA' que pasa por el punto de contacto. Si ahora repetimos la maniobra, pero colgando de otro punto, el centro de masas estará contenido en la nueva recta BB', también vertical y que pasa por el nuevo punto de contacto. Pues bien, el punto de intersección de ambas rectas es el centro de masas del cuerpo porque es el único común a las dos. Se tiene noticia de que este procedimiento fue utilizado ya en 1679

por Giovanni A. Borelli, un discípulo de Galileo, para determinar la posición del centro de masas del cuerpo humano.

4.1.7 El equilibrio en personas y animales

Tomemos, para empezar, el caso de una persona. **Si se mantiene rígida la articulación del pie con el tobillo, el equilibrio se consigue cuando la vertical del centro de masas de la persona cae sobre la superficie limitada por los dos pies.**

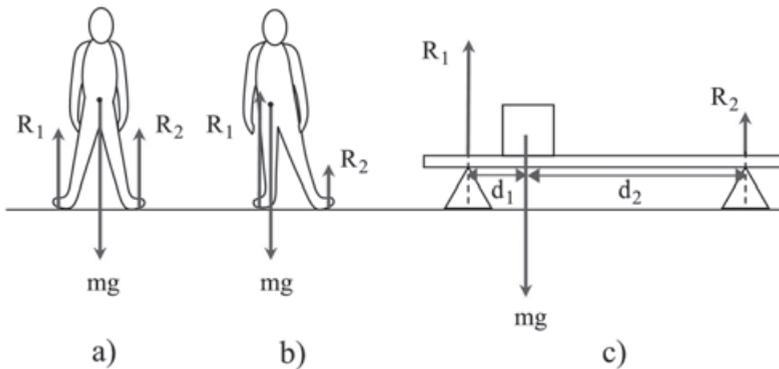


Fig. 4.18. Cuerpo humano apoyado sobre los dos pies, a) con una distribución simétrica del peso, b) ladeado hacia la derecha. c) Esquema equivalente de fuerzas.

En efecto, las fuerzas que actúan en este caso son el peso de la persona y las fuerzas de contacto en los dos pies. Podemos razonar sobre la figura humana directamente o sobre el esquema equivalente de la figura 4.18.c. Si tomamos como punto respecto del que calcular los momentos de las fuerzas uno cualquiera sobre la línea vertical que contiene al centro de masas, el momento de la fuerza debida al peso de la persona es cero y las condiciones de equilibrio son:

$$R_1 + R_2 - mg = 0$$

$$R_1 d_1 - R_2 d_2 = 0$$

de donde

$$R_1 = \frac{d_2}{d_1} R_2 \quad (4.13)$$

Siendo d_1 y d_2 las distancias entre las rectas que contienen R_1 y R_2 y el centro de masas, respectivamente.

La suma de las fuerzas de contacto es siempre igual al peso, pero el valor de cada una de ellas depende de la posición del centro de masas respecto de los pies. Si éste cae exactamente en el centro, las fuerzas de contacto son iguales y tendremos la misma sensación de pesantez en cada pie. Si nos desplazamos lateralmente de forma que el centro de masas cae cerca de uno de los pies, por ejemplo el 1, la distancia d_1 se hace menor que la d_2 y, de acuerdo con la ecuación (4.13), la fuerza de contacto sobre ese pie es mayor que sobre el otro: la sensación es muy distinta en cada pie. En el límite de este desplazamiento lateral, cuando la vertical del centro de masas caiga sobre el pie, la fuerza de contacto R_1 es igual al peso mientras que la R_2 se hace cero, no sentimos pesantez alguna sobre el pie 2 y podemos levantarlo manteniendo el equilibrio. Si seguimos el desplazamiento hasta que el centro de masas cae al otro lado del pie 1, no hay forma de compensar los momentos de las fuerzas y se pierde el equilibrio.

Nos hemos referido en el párrafo precedente al desplazamiento lateral del centro de masas; veamos ahora lo que ocurre respecto de la situación adelantada o retrasada del mismo. El centro de masas de una persona en posición erguida está en un punto cuya vertical cae unos 3 centímetros por delante de los tobillos. Si éstos no se mantuvieran rígidos gracias a la fuerza de los músculos que se insertan en el talón a través del tendón de Aquiles, nos caeríamos hacia adelante debido al par de fuerzas creado entre las fuerzas de contacto y el peso.

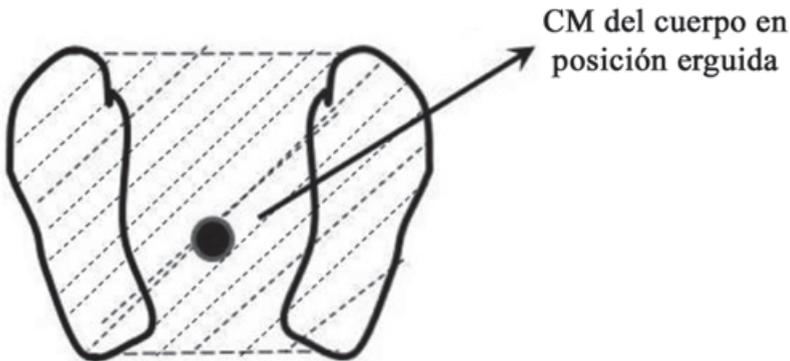


Fig. 4.19. Superficie de sustentación de los pies.

Más adelante estudiaremos este tipo de composición de fuerzas musculares, pero basta, por ahora, con comprender que si esa articulación se mantiene rígida, la fuerza de contacto se aplica en cualquier punto de la planta de los pies, y no sólo en el talón, de forma que se puede compensar el momento de la fuerza asociada al peso y mantener el equilibrio. Cuando desplazamos el tronco hacia adelante, el centro de masas del cuerpo se adelanta y podemos

perder el equilibrio si su vertical cae fuera de la superficie limitada por los pies. Para evitar esto, de forma automática las caderas tienden a retrasarse para mantener al centro de masas dentro de dicha superficie. Si, por ejemplo, nos ponemos en posición vertical con los talones y las nalgas pegados a la pared, estamos impidiéndonos retrasar la parte de las caderas respecto de los pies. Si, en esa posición, intentamos llevar el tronco hacia adelante sin doblar las rodillas, vemos que perdemos el equilibrio inmediatamente.

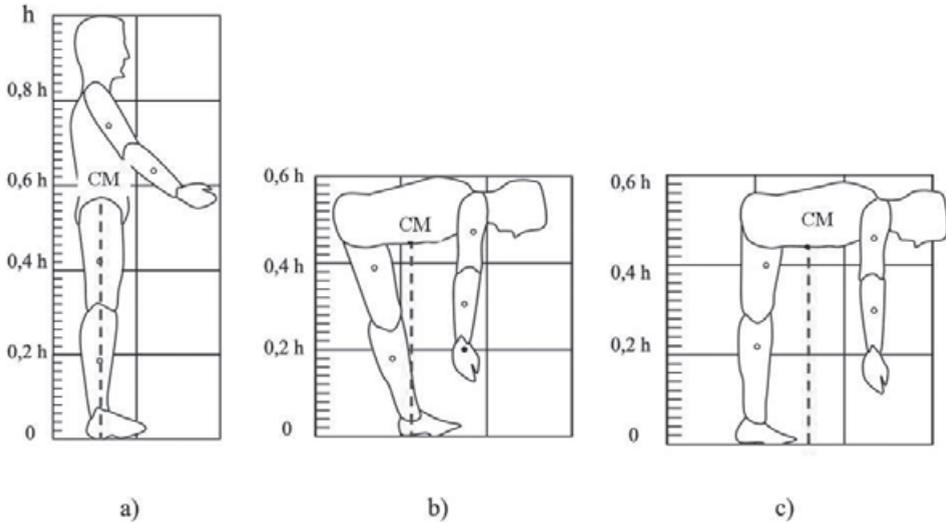


Fig. 4.20. a) Persona erguida. b) Al inclinarse con las piernas rectas, retrasa instintivamente las caderas para que el centro de masas caiga sobre la superficie de sustentación. c) Si se inclinara con las piernas rectas sin retrasar la cadera, el centro de masas caería fuera de la superficie de sustentación y la persona perdería el equilibrio.

Mantener el equilibrio mientras nos movemos es difícil y requiere un control neurológico complejo y evolucionado, como demuestra el hecho de que a un niño le cuesta un año dominar los mecanismos de coordinación nerviosa y muscular necesarios para mantenerse en pie y caminar. Y está claro que han tenido que ir apareciendo tras un largo proceso evolutivo. Así, el equilibrio de los gusanos es bastante sencillo y también el de los artrópodos, mientras que es más difícil en los animales cuadrúpedos y todavía más en los bípedos.

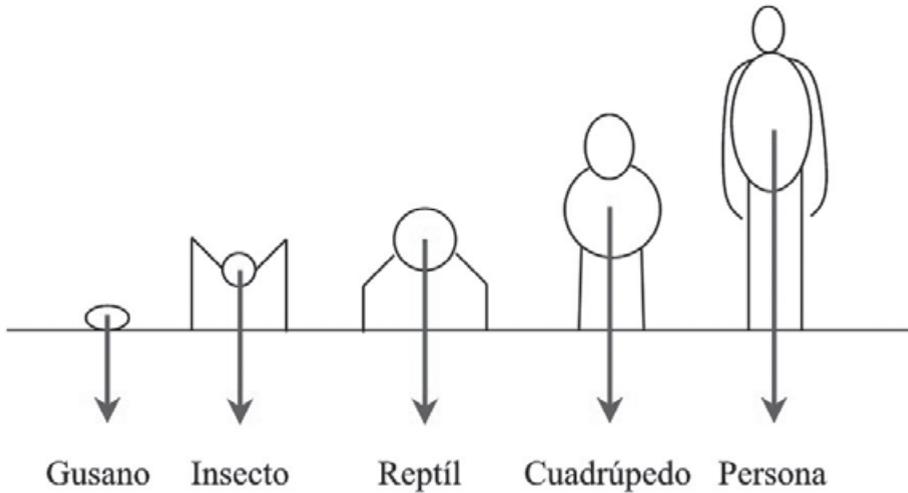


Fig. 4.21. Equilibrio estático de distintas categorías de animales.

Los humanos y las aves mantienen el equilibrio apoyándose únicamente en dos extremidades, lo cual es sólo posible porque la superficie de sustentación cubierta por dichas extremidades es bastante grande. Los primates y los osos pueden también mantener una posición bípeda por la misma razón, pero para la mayoría de los animales la superficie de contacto de las extremidades con el suelo es demasiado pequeña como para que puedan mantenerse en equilibrio a dos patas de forma estable.

Un caballo o una vaca, por ejemplo, mantienen permanentemente la situación de equilibrio mientras caminan, ya que sólo levantan una pata en cada instante y las otras tres delimitan una superficie dentro de la cual cae el centro de masas del animal. Así, pueden pararse con una de las patas en el aire sin gran dificultad, mientras que es más difícil para una persona mantener el centro de gravedad sobre la superficie del único pie de apoyo mientras camina, lo que implica un ligero bamboleo lateral. Cuando un cuadrúpedo corre a gran velocidad, sólo una o dos de sus patas están en contacto con el suelo, por lo que la situación es de desequilibrio, y el cuerpo tiende a caer hasta que las patas que estaban en el aire tocan el suelo y recuperan la estabilidad. Se trata de un fenómeno similar al que ocurre cuando una persona corre.

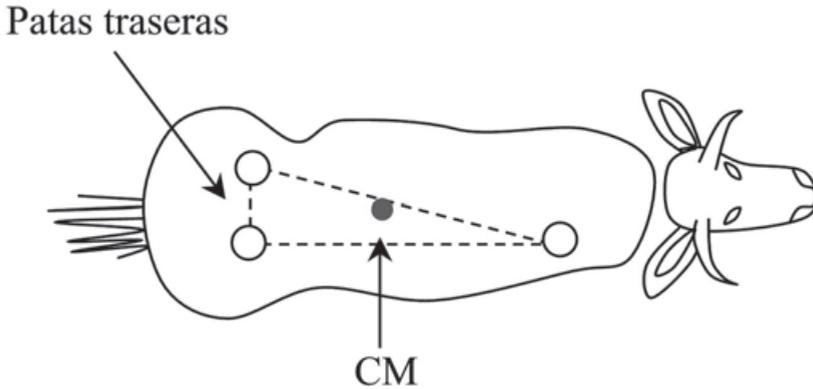


Fig. 4.22. Un cuadrúpedo en marcha lenta se apoya sobre tres patas de forma que su centro de masas cae dentro de la superficie de sustentación.



Fig. 4.23. Persona en carrera.

La posición de carrera es tal que el centro de masas cae fuera de la superficie de sustentación y se crea necesariamente un par entre el peso y la fuerza de contacto del pie con el suelo que hace que el cuerpo bascule, aunque la basculación sólo dura hasta que el otro pie se apoya en el suelo. Al avanzar el tronco y adelantarse la pierna contraria, se repite la misma situación y así mientras dura la carrera. Durante el movimiento rápido se van sucediendo, por tanto, periodos de inestabilidad transitoria.

Los animales de pies pequeños, como los artrópodos, tendrían muchas dificultades para mantener el equilibrio con sólo dos patas en el suelo debido a que la superficie que delimitan es prácticamente una recta. Además, al ser muy ligeros, cualquier soplo de viento o irregularidad del terreno haría que la vertical de su centro de masas cayera fuera de la superficie de sustentación. Como consecuencia de estas limitaciones, los insectos siempre mantienen tres de sus seis patas sobre el suelo formando un trípedo. En realidad organizan sus seis patas en dos trípedes, uno de los cuales está siempre en contacto con el suelo proporcionando una amplia superficie triangular sobre la que cae el

centro de masas. Además, para aumentar la estabilidad, las patas no caen verticalmente desde el tórax, sino que se doblan hacia afuera.

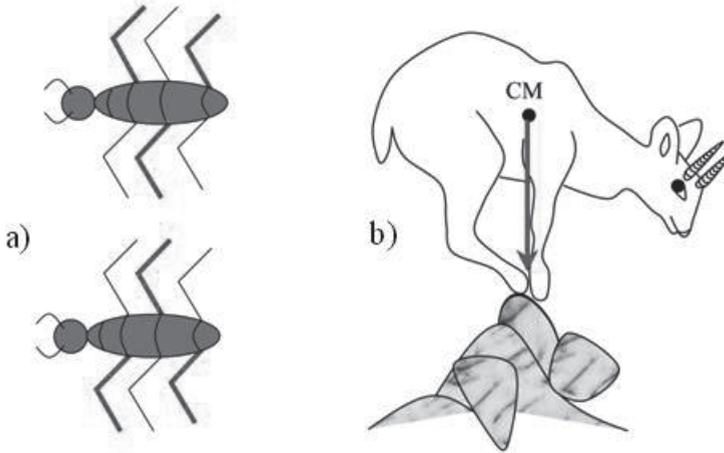


Fig. 4.24. a) Marcha de un insecto. El trípedo formado por las tres patas en línea gruesa es el que está en contacto con el suelo.

b) Un cáprido en equilibrio sobre una diminuta superficie de sustentación.

Hay animales, como las cabras, que tienen un sistema muscular y neurológico de equilibrio muy perfeccionado, lo que les permite mantener la vertical del centro de masas justo sobre la pequeña superficie que forman sus extremidades cuando están muy juntas. De ahí sus conocidas habilidades como equilibristas. En concreto, el oreótrago saltador (*Oreotragus oreotragus*), que vive en las montañas de África oriental, puede saltar y caer juntando sus pezuñas en el espacio de apenas una moneda y mantener el equilibrio en estas circunstancias, una habilidad extremadamente valiosa en un entorno agreste y rocoso.

4.1.8 La palanca

Una palanca es un sistema formado por una varilla rígida apoyada en un pivote sobre la que actúan dos fuerzas, a las que normalmente se les asigna el carácter de peso y fuerza externa necesaria para contrarrestarlo, con momentos de signo contrario respecto del punto de contacto entre pivote y varilla. Cuando los momentos se cancelan exactamente, el sistema está en equilibrio. Dependiendo de la posición relativa entre los puntos de aplicación de las fuerzas y el punto de apoyo se distinguen tres casos de palanca:

1. En la palanca de primer género el punto de apoyo está entre los puntos en los que se aplican las dos fuerzas.

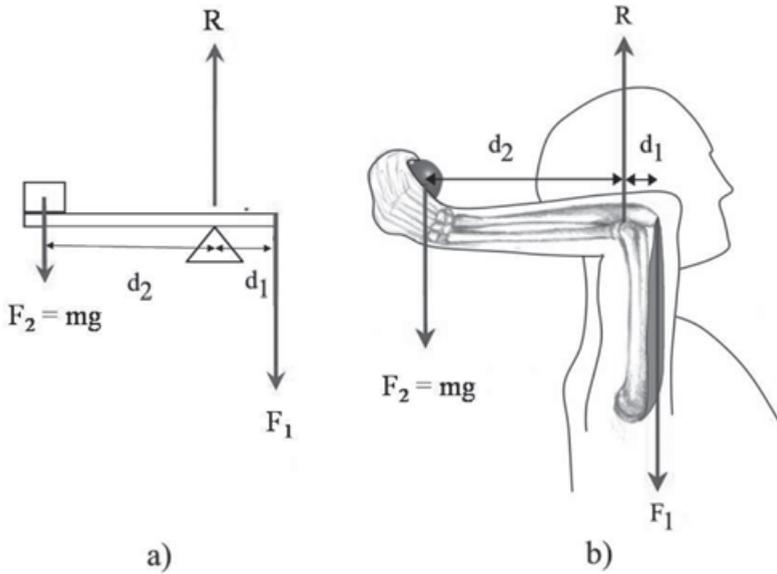


Fig. 4.25. a) Palanca de primer género. b) Extensión del brazo por la acción del tríceps que tira del extremo del cúbito.

En el equilibrio, las sumas de fuerzas y de momentos deben anularse. Tomaremos los momentos de las fuerzas respecto del punto de apoyo, $F_2 = mg$ es el peso de un objeto situado en uno de los extremos, F_1 es la fuerza vertical hacia abajo que hay que hacer para mantenerlo en equilibrio, y R es la fuerza de contacto sobre la varilla en el punto de apoyo sobre el pivote, según la disposición de la figura 4.25.a. No prejuzgaremos en este ejercicio y en los que siguen el signo de R , sino que saldrá como resultado de los cálculos:

$$R - F_1 - mg = 0$$

$$F_1 d_1 - mg d_2 = 0$$

$$F_1 = mg \frac{d_2}{d_1}$$

Si d_2 es mayor que d_1 , hay que hacer una fuerza superior al peso del cuerpo para mantener el equilibrio o moverlo hacia arriba, pero, a cambio, se puede generar un desplazamiento mayor de dicho peso. Es el caso de la extensión del brazo por medio del tríceps braquial contra un peso situado en la mano (ver la figura 4.25.b). Si, por el contrario, d_2 es menor que d_1 la fuerza necesaria para mantener el equilibrio o mover el peso es menor, pero también lo es el desplazamiento producido.

2. En la palanca de segundo género, el peso está entre el punto de apoyo y la fuerza, en este caso vertical hacia arriba. La expresión que da la fuerza es la misma que en el caso anterior, y como d_f es siempre mayor que d_l , se sigue que la fuerza F_l es menor que el peso del cuerpo, pero el desplazamiento generado es pequeño.

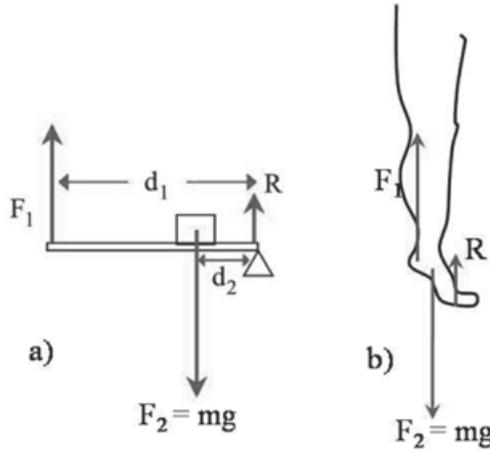


Fig. 4.26. a) Palanca de segundo género. b) Extensión plantar del cuerpo.

Un ejemplo de palanca de segundo género es la extensión plantar del pie (ver la figura 4.26.b).

3. En la palanca de tercer género es la fuerza aplicada la que se encuentra entre el punto de apoyo y el peso. La fuerza que hay que hacer es, en este caso, mayor que el peso debido a que d_l es siempre menor que d_f pero se genera una gran movilidad.

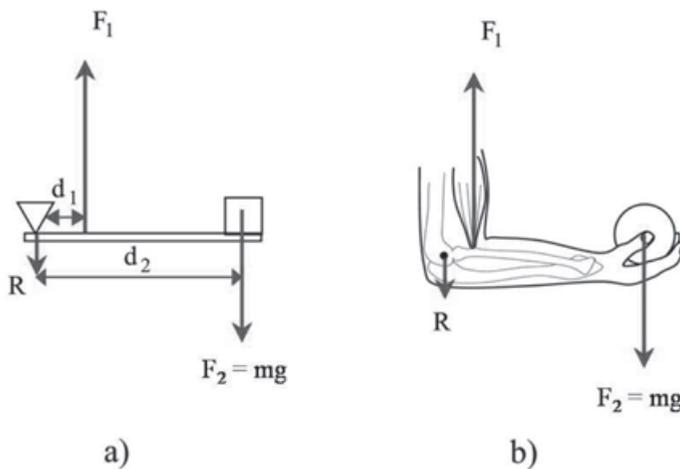


Fig. 4.27. a) Palanca de tercer género. b) Flexión del brazo por la acción del bíceps braquial sobre el radio.

Un ejemplo es la flexión del brazo por medio del bíceps braquial, tal como se muestra en la figura 4.27.b, que veremos con detalle más adelante.

4.1.9 Equilibrio estable e inestable

Cuando se aparta ligeramente un cuerpo de su posición de equilibrio, el momento de las fuerzas que actúan sobre él hace que se mueva, pero dependiendo del sentido del movimiento, **el cuerpo puede volver a su posición de equilibrio inicial o puede alejarse de ella. En el primer caso, se dice que el equilibrio es estable y en el segundo, inestable.** Un lápiz en posición vertical está en equilibrio inestable porque al desviarlo ligeramente el centro de masas caerá fuera de la base de sustentación, debido a la pequeñez de ésta, y el movimiento así iniciado alejará al lápiz de la posición inicial.

Un objeto con una mayor base de sustentación, por el contrario, es tal que el momento generado tiende a restaurar el equilibrio. Hay también dispositivos que, debido a su peculiar estructura de masas, tienen una gran estabilidad a pesar de su pequeña superficie de sustentación, como el juguete de la figura 4.28, en el que el centro de masas se sitúa por debajo del punto de apoyo y el momento que se genera al separarlo de la posición de equilibrio tiende a restaurar dicha posición.

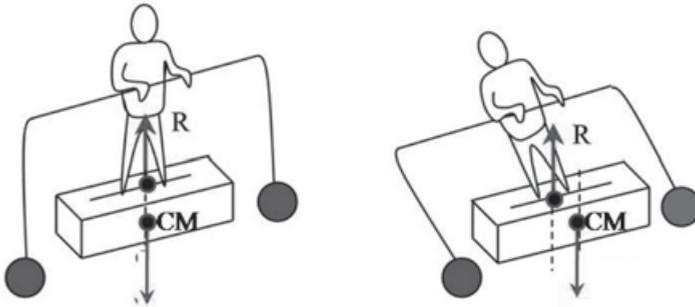


Fig. 4.28. Juguete con un centro de masas situado por debajo del punto de apoyo, lo que asegura su estabilidad.

En las personas, la posición del tronco erguido no es la más adecuada para mantener el equilibrio sobre las caderas con facilidad. El centro de masas de la cabeza, el tronco y extremidades superiores está situado en el pecho, a unos 35 cm por encima de las caderas y es necesario un sistema muscular y neurológico complicado que regule continuamente la posición de la columna.

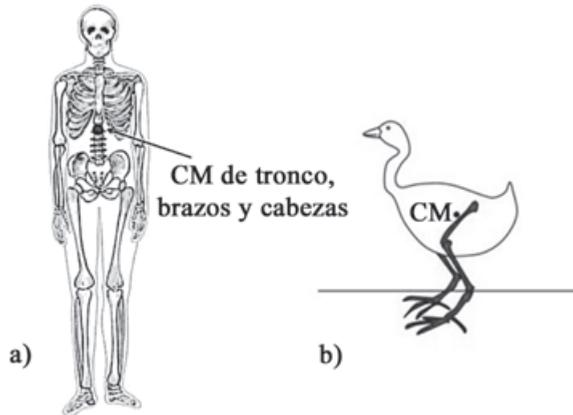


Fig. 4.29. a) El centro de masas del tronco, cabeza y brazos de una persona está por encima del punto de apoyo del tronco sobre las extremidades inferiores. b) El centro de masas del cuerpo de un ave está por debajo del punto de apoyo del tronco sobre las extremidades inferiores.

Por el contrario, las aves, que se mantienen también sobre dos extremidades, han evolucionado durante más de cien millones de años y poseen una distribución de masas que hace más fácil su equilibrio. En efecto, el centro de gravedad del cuerpo, cabeza y alas está situado por debajo de las caderas, de forma que “cuelga” de éstas, en lugar de estar apoyado desde encima, como en el caso de los humanos. El equilibrio de las aves es, por lo tanto, más sencillo de mantener y requiere de menos sofisticación neurológica.

4.2 Bioestática

4.2.1 Las extremidades superiores

Consideraremos en este capítulo las condiciones que deben cumplirse para que los cuerpos humanos o de otros animales, o algunas de sus partes, se mantengan en equilibrio bajo la acción del campo gravitatorio terrestre. Los principios que deben aplicarse son los generales del equilibrio desarrollados anteriormente, pero **lo característico en la bioestática es la necesidad de determinar los puntos y ángulos de inserción de los distintos músculos generadores de fuerza en los segmentos óseos.**

Empezaremos por un caso sencillo. Veamos el conjunto de fuerzas que es necesario poner en juego para mantener un brazo horizontal.

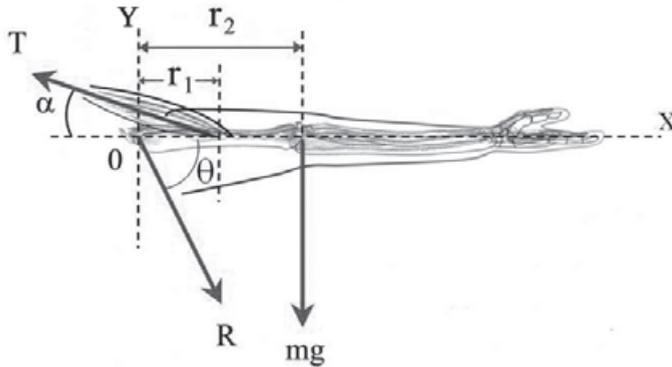


Fig. 4.30. Brazo en posición horizontal por la acción del músculo deltoides que tira del húmero con una fuerza T.

En este caso, el brazo se mantiene rígido y sobre él actúa la gravedad, que, como sabemos, puede considerarse aplicada sobre su centro de masas. Por otro lado, el músculo deltoides parte de la clavícula y escápula y se inserta en el húmero formando un cierto ángulo y tirando de él para mantenerlo en posición horizontal. La cabeza del húmero, por su parte, se inserta en la escápula y genera una fuerza de contacto de ésta. **Es importante, en todos los ejercicios de bioestática, identificar la parte del cuerpo cuyo equilibrio se quiere estudiar y tener en cuenta únicamente las fuerzas que actúan sobre dicha parte.** En este caso, las fuerzas sobre el brazo son: su peso, aplicado en el centro de gravedad, la tensión del deltoides, aplicada en el punto de inserción, y la fuerza de contacto de la escápula, aplicada sobre la cabeza del húmero. Llamando T a la fuerza ejercida por el deltoides y R a la fuerza de contacto, las condiciones de equilibrio son:

$$\sum \vec{F} = \vec{T} + \vec{R} - mg\vec{u}_y = 0$$

$$\sum \vec{\Gamma} = \vec{r}_1 \times \vec{T} + \vec{r}_2 \times (-mg\vec{u}_y) = 0$$

donde hemos tomado los momentos de las fuerzas respecto del extremo del húmero sobre el que pivotaría el brazo en caso de girar y escogido como eje Y la dirección vertical con sentido positivo hacia arriba. Escribiendo ahora las ecuaciones precedentes en componentes, resulta:

$$\sum F_x = -T \cos \alpha + R_x = 0$$

$$\sum F_y = T \operatorname{sen} \alpha - mg + R_y = 0$$

$$\sum \Gamma_z = r_1 T \operatorname{sen} \alpha - r_2 mg \operatorname{sen} 90^\circ = 0$$

Puesto que \vec{r}_1 , \vec{r}_2 y $\vec{g}u_y$ son vectores contenidos en el plano XY , el momento de las fuerzas estará dirigido según el eje Z ; de ahí que la ecuación para el momento total de la fuerza se reduzca a la componente z . Justamente, de esta tercera ecuación podemos encontrar la fuerza con la que el deltoides tiene que tirar. Tomando la masa del brazo, $m = 3,5 \text{ kg}$, su longitud igual a 75 cm , la distancia del centro de masas al punto fijo, $r_2 = 30 \text{ cm}$, el punto de inserción del húmero, $r_1 = 14 \text{ cm}$ y el ángulo de inserción, $\alpha = 15^\circ$, tenemos que:

$$T = \frac{0,30 \times 3,5 \times 9,8}{0,14 \times \operatorname{sen} 15^\circ} = 284 \text{ N}$$

Obsérvese que para sostener el brazo con una fuerza en vertical hacia arriba aplicada al centro de masas, bastaría con que ésta fuera de $3,5 \times 9,8 = 34 \text{ N}$. El hecho de que el deltoides tenga que hacer una fuerza ocho veces mayor se debe a la distancia y ángulo de inserción, determinados por la necesidad que tiene el músculo de apoyarse en el resto de la estructura ósea. Las componentes de la fuerza de contacto pueden obtenerse ahora a partir de las dos primeras ecuaciones:

$$R_x = T \cos \alpha \approx 274 \text{ N}$$

$$R_y = -T \operatorname{sen} \alpha + mg \approx -39 \text{ N}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{R_y}{R_x} = -0,14$$

Dicha fuerza está, por lo tanto, dirigida hacia abajo, con un ángulo de inclinación $\theta = -8^\circ$.

Consideremos ahora el caso en el que se pone un objeto de masa M en la mano, lo que implica que su centro estará a unos 70 cm del extremo del húmero. Podemos rehacer el cálculo para una posición de equilibrio horizontal de forma muy simple.

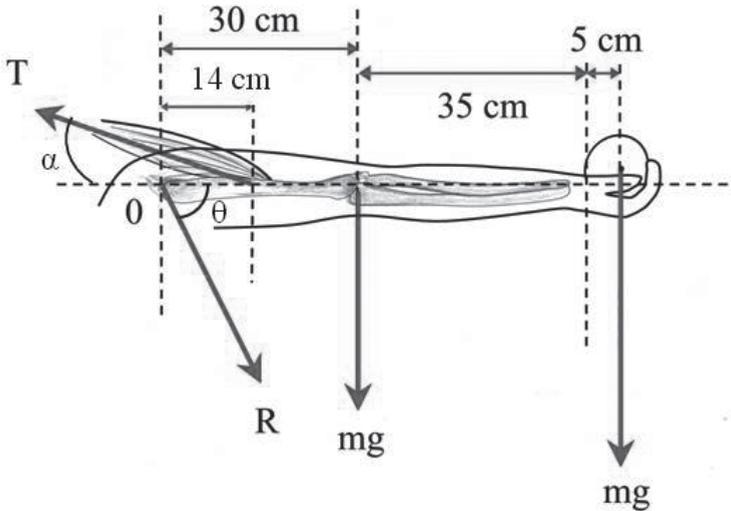


Fig. 4.31. Brazo en posición horizontal con un peso en la mano.

$$T = \frac{0,30 \times 3,5 \times 9,8 + 0,70 \times M \times 9,8}{0,14 \times \text{sen}15^\circ} = 284 + 189 \times M \text{ N}$$

Es decir, para una masa de unos 5 kg, la fuerza que tiene que hacer el deltoides es de 1.229 N, de nuevo muy superior a la que sería necesaria para mantener brazo y peso con una fuerza vertical hacia arriba aplicada en el centro de masas del sistema. Las componentes de la fuerza de contacto son, por su parte:

$$R_x \approx 1.187 \text{ N}$$

$$R_y \approx -235 \text{ N}$$

Veamos ahora la fuerza que tiene que hacer el bíceps para mantener horizontal el antebrazo con un peso en la mano, estando el húmero en posición vertical. El bíceps es el músculo flexor de la articulación del codo y puede actuar contrayéndose y moviendo el antebrazo para levantar un peso.

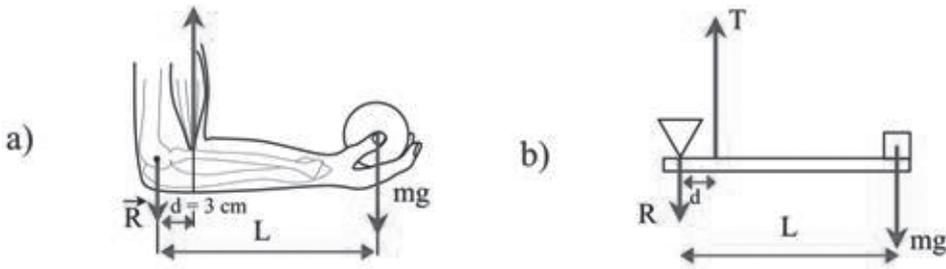


Fig. 4.32. a) Brazo en ángulo recto sujetando un peso gracias a la fuerza generada por el bíceps. b) Esquema de fuerzas en presencia.

El bíceps está sujeto a la escápula, en el hombro, y se inserta en el radio, mientras que el tríceps, que es el antagonista del bíceps, se inserta en el cúbito y, cuando se contrae, extiende el antebrazo. El punto de inserción del bíceps es muy próximo a la articulación del codo, apenas 3 cm, por lo que el ángulo de inserción es casi recto. Nótese que en la aproximación en que este ángulo sea exactamente de 90°, la fuerza de contacto, en el codo, es vertical hacia abajo, ya que no sería posible conseguir cancelar las fuerzas si tuviera una componente horizontal. Tomando momentos respecto del punto de articulación y suponiendo que la masa del antebrazo es mucho menor que la del cuerpo que se está sujetando, las ecuaciones de equilibrio son las de la palanca de tercer género:

$$R + T - Mg = 0$$

$$Td - MgL = 0$$

De la segunda ecuación obtenemos la tensión que debe mantener el bíceps:

$$T = Mg \frac{L}{d} \tag{4.14}$$

Y como $L \gg d$, la fuerza con que el bíceps debe tirar del radio es mucho mayor que la del peso sujeto en la mano. Para las personas, L es del orden de unos 35 cm y d de unos 3 cm, por lo que:

$$T \approx 12Mg$$

Como ya sabemos, la fuerza que puede desarrollar un músculo por unidad de sección es aproximadamente la misma para todos los animales. Así, la tensión máxima está dada por su sección y, a partir del valor de ésta, puede calcularse el peso máximo que puede sostener, es decir, invirtiendo la ecuación (4.14):

$$Mg = T \frac{d}{L} \quad (4.15)$$

Una persona sin entrenamiento especial puede tener un bíceps cuya sección máxima sea un círculo de unos 8 cm de diámetro, lo que implica un área de unos 50 cm². Como la fuerza máxima por unidad de sección desarrollada por los músculos esqueléticos de los vertebrados es del orden de 30 N/cm², un bíceps de este tamaño puede tirar del radio con una fuerza de unos 1.500 N, de donde:

$$Mg \approx 1.500 \times \frac{3}{35} = 129N$$

lo que permite sujetar un objeto de unos 13 kg. Una persona con entrenamiento específico puede llegar hasta los 7.000 N de fuerza en sus bíceps, esencialmente aumentando su sección hasta duplicar el diámetro de un bíceps normal (piénsese en el diámetro de brazos y muslos de deportistas como los levantadores de peso o los esquiadores de descenso). Para este supuesto, la fuerza máxima que se puede desarrollar es de unos 600 N, es decir, se puede mantener en contracción isométrica hasta un peso del orden de 60 kg.

La ecuación (4.15) expresa también la relación entre la fuerza máxima que puede desarrollar un miembro para mover o sujetar pesos y su longitud L . Cuanto mayor sea ésta, más pequeño es el cociente d/L y menor es la fuerza. Así, **los animales con extremidades largas suelen ser débiles aunque sean muy veloces. Por el contrario, los animales que necesitan manejar pesos, como la mayoría de los felinos, que deben abatir y transportar a sus presas, no pueden tener miembros muy largos.** L es más bien pequeña y T más bien grande o, en otras palabras, sus patas son más bien cortas y fuertes.

4.2.2 La cadera y las piernas

Consideremos, en primer lugar, el equilibrio de una persona en el plano frontal, es decir, respecto de giros laterales. Como ya vimos antes, cuando una persona está erguida, en reposo, descansando simétricamente sobre los dos pies, la vertical del centro de gravedad cae sobre un punto equidistante de ambos pies y la fuerza de contacto del suelo es la misma en cada uno de los dos e igual a la mitad del peso del cuerpo. Cuando hay un desplazamiento lateral, la vertical del peso también se desplaza lateralmente y, en el límite, el cuerpo se apoya sobre uno de los pies. Supongamos que una persona levanta el pie izquierdo y se apoya únicamente en el derecho. El centro de masas del conjunto del tronco, cabeza, extremidades superiores y pierna izquierda, es decir, todo el cuerpo menos la pierna derecha, está ligeramente desplazado

una distancia d a la izquierda del eje de simetría del cuerpo (es decir, a la derecha en la figura 4.33, ya que se ve a la persona de frente).

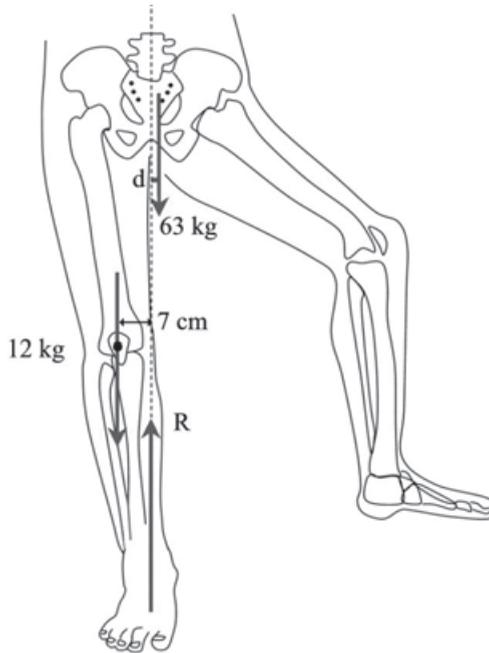


Fig. 4.33. Equilibrio del cuerpo humano sobre un pie. La masa del tronco, brazos, cabeza y pierna izquierda es de 63 kg, mientras que la masa de la pierna derecha es de 12 kg.

Estudiamos el equilibrio del cuerpo en conjunto, por lo que la única fuerza de contacto, ejercida por una superficie sólida externa, es la del suelo sobre el pie derecho, que se aplica en la superficie de apoyo y va dirigida hacia arriba. Supongamos que la persona pesa 75 kg, que cada una de sus piernas pesa 12 kg y que al apoyarse sobre el pie derecho, el centro de masas de la pierna derecha se encuentra a 7 cm a la derecha de la vertical del eje de simetría del cuerpo. Las condiciones de equilibrio para que el cuerpo no pivote sobre el pie son:

$$\sum F = -63g - 12g + R = 0$$

$$\sum \Gamma = 12 \times 0,07 - 63 \times d = 0$$

de donde:

$$R = 75g = 735N$$

$$d \approx 1,3 \text{ cm}$$

La fuerza de contacto del suelo, R , resulta igual, en módulo, al peso total del cuerpo, como era de esperar.

Consideremos ahora las condiciones de equilibrio sobre la pierna derecha de la parte superior del cuerpo, que puede pivotar sobre el punto de contacto entre la cadera y la cabeza del fémur a causa de la asimetría de la posición y la tendencia a girar hacia la izquierda (hacia la derecha en la figura 4.34) debido a que el pie de ese lado no está apoyado en el suelo. Consideremos, por lo tanto, el juego de fuerzas que actúan sobre esta parte del cuerpo (todo menos la pierna derecha). Por un lado, está su peso, cuya línea de acción hemos visto que se encuentra $1,3\text{ cm}$ desplazada a la izquierda del eje de simetría. Para evitar el giro lateral, el glúteo mayor, que une el fémur y los huesos que forman la cadera, tira de ésta hacia el trocánter mayor, que es la protuberancia más externa del fémur, con una fuerza T que forma un ángulo con la horizontal que los estudios anatómicos y de rayos X han mostrado ser de unos 60° respecto a la horizontal.

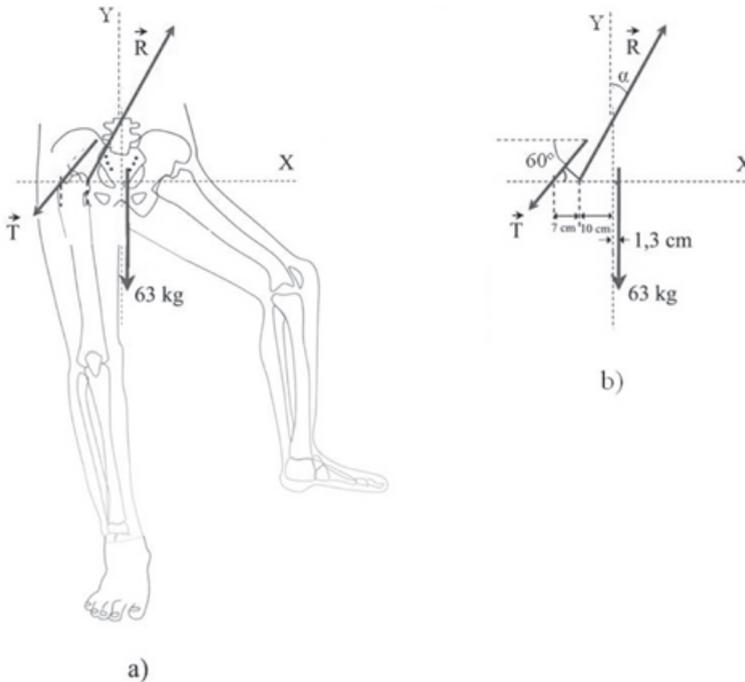


Fig. 4.34. a) Equilibrio del cuerpo apoyado sobre la pierna derecha.
b) Juego de fuerzas que impiden la rotación sobre la cabeza del fémur.

El equilibrio se mantiene, finalmente, gracias a la fuerza de contacto, R , entre la cabeza del fémur y el alveolo semiesférico en el que ésta encaja, llamado acetábulo, en la conjunción de los tres huesos de la cadera (ilion, isquion y pubis).

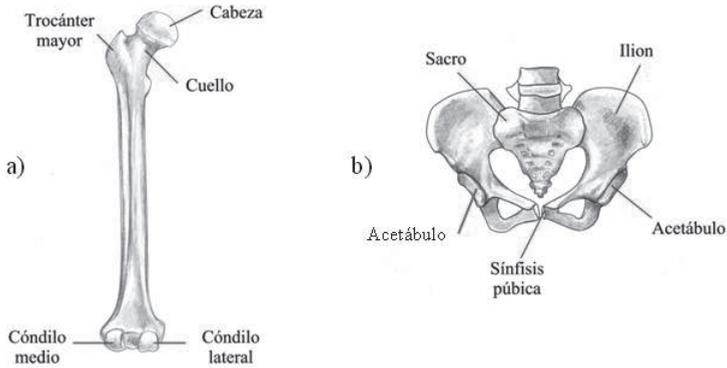


Fig. 4.35. a) Fémur. b) Cadera.

El punto de aplicación y la dirección de esta fuerza se conocen aproximadamente a partir de la estructura ósea de la cabeza del fémur, cuyo crecimiento y conformación dependen de la dirección e intensidad de las fuerzas que necesita soportar. En concreto, el punto de aplicación está a unos 10 cm en horizontal del eje de simetría y a unos 7 cm en horizontal del trocánter mayor, según puede verse en la figura 4.34.b. Escribiremos ahora las condiciones de equilibrio, calculando los momentos respecto del punto en el que se aplica la fuerza de contacto, que sería el centro de giro:

$$\sum F_x = -T \cos 60^\circ + R_x = 0$$

$$\sum F_y = -T \operatorname{sen}60^\circ + R_y - 63g = 0$$

$$\sum \Gamma_z = T \times 0,07 \operatorname{sen}60^\circ - 63g \times 0,113 = 0$$

De la última ecuación se sigue que la fuerza con que hay que tirar del pubis es:

$$T = 1151 \text{ N}$$

y la fuerza de contacto es:

$$R_x = 575 \text{ N} \tag{4.16}$$

$$R_y = 1.614 \text{ N} \tag{4.17}$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 1.713 \text{ N} \tag{4.18}$$

La fuerza de contacto que soporta la cabeza del fémur es muy grande, más del doble del peso del cuerpo, según puede verse en la expresión (4.18), debido a que debe compensar el peso que gravita sobre dicho punto y la fuerza muscular para mantener el equilibrio, estando ambas dirigidas hacia abajo; de ahí la gran componente vertical positiva de R . Cuando el cuerpo está reposando en posición simétrica sobre ambos pies, desde el punto de vista del equilibrio en el plano frontal, no se necesita ninguna fuerza muscular y la fuerza de contacto sobre cada uno de los fémures es simplemente la mitad del peso del cuerpo menos las piernas, en este caso 250 N , casi siete veces menos que cuando se apoya sobre un solo pie. La diferencia entre las fuerzas que tiene que soportar la cabeza del fémur cuando se está apoyado sobre los dos pies y cuando, al caminar, sólo hay un pie de apoyo, es enorme, aunque puede absorberla perfectamente, así como las fuerzas todavía mayores que se generan durante la carrera.

Observación. *La fuerza de contacto que tiene que soportar la cabeza del fémur (igual y de sentido contrario a la R de las ecuaciones (4.16-17)) apunta hacia abajo formando un ángulo α con la vertical tal que:*

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R_x}{R_y} = 0,36$$

es decir, de unos 20° . Pues bien, observaciones detalladas con rayos X han permitido concluir que la dirección de esta fuerza coincide exactamente con la del cuello del fémur. Los ejes de la trabécula esponjosa que forman el cuello y la cabeza del fémur son la prolongación de la línea de aplicación de la fuerza, como se ve en la figura 4.36, lo que sugiere que el crecimiento de este hueso está dirigido, al menos parcialmente, por la fuerza que se aplica sobre él.

La cabeza del fémur está protegida por una cubierta llamada epífisis, sujeta rígidamente a la estructura ósea. A lo largo del crecimiento de una persona, la dirección de la fuerza sobre el fémur cambia ligeramente, lo que implica un cambio en la dirección del cuello y también en la epífisis, siempre perpendicular a dicha fuerza, ya que, en caso contrario, habría una componente tangencial que tendería a hacer deslizar el acetábulo sobre la cabeza del fémur.

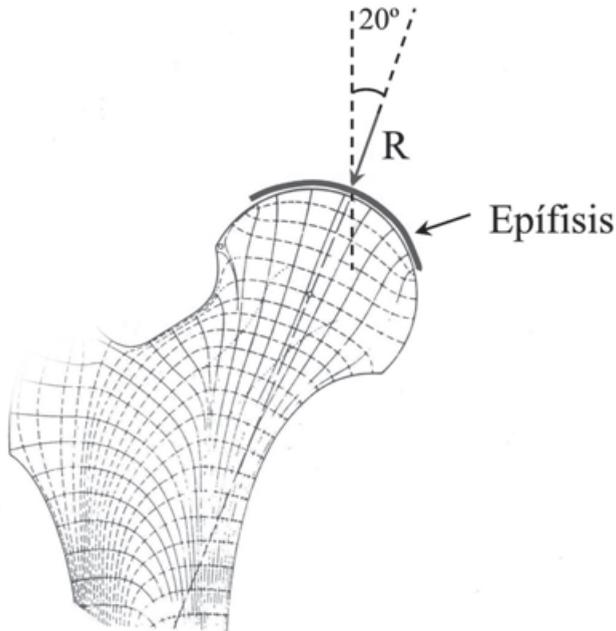


Fig. 4.36. Ejes de la trabécula del cuello del fémur, dirección de la fuerza de contacto con el acetábulo y epífisis de la cabeza del fémur.

En el caso de que los músculos que unen el trocánter mayor y la cadera resulten inutilizados, la única forma de mantener el equilibrio al andar es que el centro de gravedad del cuerpo menos la pierna de apoyo caiga en vertical sobre ésta, ya que, entonces, la simple fuerza de contacto en la cabeza del fémur basta para contrarrestar el peso. La persona afectada por esta enfermedad muestra lo que se conoce como paso antálgico, que es una peculiar forma de caminar en la que hay una inclinación hacia el lado del músculo paralizado, para conseguir que todo el peso caiga en vertical sobre la cabeza del fémur. La consecuencia es que la epífisis tiende a desplazarse hacia la posición horizontal para quedar perpendicular a la fuerza de contacto y el cuello del fémur tiende a crecer verticalmente y no con la inclinación normal de 20° , lo que, a su vez, implica que la longitud total de ese fémur es superior a la del otro, por lo que la pelvis está permanentemente inclinada y repercute en deformaciones de la columna.

4.2.3 El tronco y la columna

Veamos ahora la columna vertebral y el equilibrio respecto de giros frontales. La columna no es una estructura rígida ni rectilínea, sino que está formada por un conjunto de segmentos, las vértebras, dotadas de la capacidad de cierto movimiento relativo y dispuestas a lo largo de una línea que presenta

tramos curvos. Sin embargo, a los efectos de estudiar su equilibrio, podemos considerarla como una estructura rígida y aproximadamente rectilínea con un ensanchamiento en su parte inferior, el sacro, cuyas dos protuberancias laterales se encastran en el hueso de la cadera formando una articulación en bisagra que permite el movimiento hacia adelante y hacia atrás (ver la figura 4.35.b).

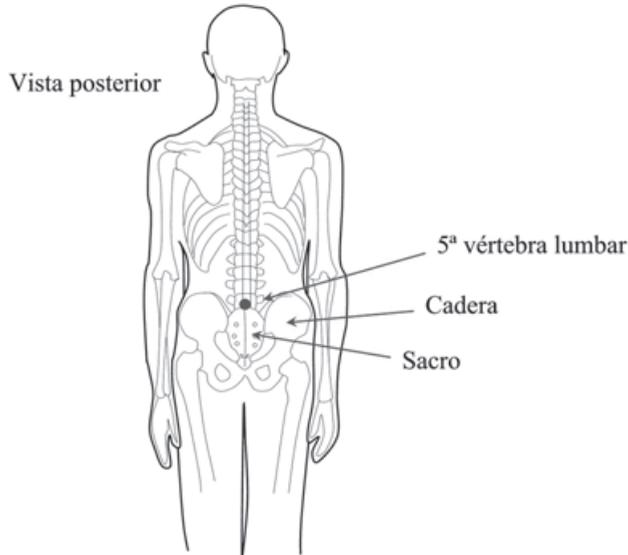


Fig. 4.37. Articulación de la columna vertebral con la cadera.

Cuando una persona se inclina hacia adelante, el peso del tronco y la cabeza, y la carga que pueda soportar con los brazos, la harían girar si no fuera porque los músculos de la espalda, principalmente los músculos sacroespinales, tiran de la columna desde la cadera. Dichos músculos se insertan, en su parte inferior, entre el ilion y la parte inferior del sacro y, en su parte superior, a las apófisis espinosas de las vertebrae lumbares y torácicas. En promedio, su acción puede aproximarse por un único músculo que se inserta en un punto situado aproximadamente a unos $2/3$ de su longitud, con un ángulo de unos 10° con el eje de la columna. El centro de gravedad del tronco, los brazos y la cabeza, cuya masa total es m , se sitúa también alrededor de ese punto, mientras que la carga M que se sujeta con las manos se aplica a lo largo de la línea vertical que pasa por los hombros. El conjunto de fuerzas que actúan sobre la columna cuando el cuerpo se inclina un ángulo α con la vertical puede verse en la figura 4.38. En el Ejercicio 4.17 se resuelven las condiciones de equilibrio.

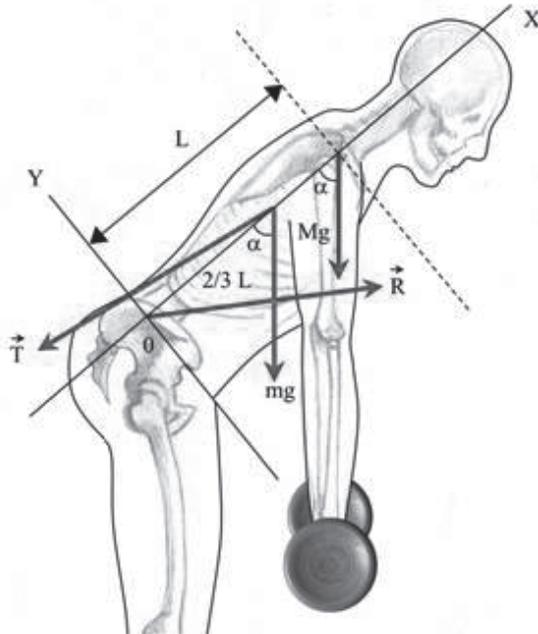


Fig. 4.38. Equilibrio de un cuerpo inclinado sujetando un peso.

Como puede verse en la solución de dicho Ejercicio, la fuerza de contacto está dirigida casi en la dirección de la columna y su valor es también muy grande. Tanto la tensión que mantienen los músculos de la espalda como la fuerza de contacto que soporta el sacro contra la cadera serían, por lo tanto, suficientes para sostener un peso de unos 370 kg. Toda esta fuerza es también la que soporta la última vértebra, la quinta lumbar, sobre el sacro, disminuyendo en las otras vértebras a medida que su posición es más elevada. De ahí la frecuencia de las lesiones sobre la quinta lumbar como consecuencia de levantar o cargar pesos con la espalda flexionada.

4.3 La locomoción en los animales

4.3.1 La marcha y la carrera

Estudiaremos en esta sección el desplazamiento de distintos animales terrestres. El movimiento se debe al impulso de las extremidades sobre el suelo en dirección contraria a la marcha sólo posible gracias a la existencia de rozamiento entre las dos superficies (suelo y extremidad). Si la marcha es regular, a velocidad constante, se compone de una serie de pasos de la misma longitud y frecuencia. **Entendemos por longitud de paso la distancia entre dos puntos de apoyo sucesivos de una misma extremidad. Para una persona andando, la longitud de paso (SL, de *stride length*) es el doble de la**

distancia que hay entre los dos pies cuando están ambos en contacto con el suelo, es decir, dos zancadas. Cuando se camina, la longitud de paso es de unos 1,80 m, mientras que un corredor de 100 metros tiene una longitud de paso de unos 4,40 m, que corresponde a una zancada de 2,20 m. Entendemos por frecuencia de paso el número de pasos por segundo, que, para una persona, es la mitad del número de apoyos de ambos pies por segundo. Un corredor de 100 m da $\frac{100}{2,20} \approx 46$ zancadas, que equivale a 23 pasos. Si completa la carrera en 10 s, entonces la frecuencia de paso es de 2,3 pasos por segundo.

Llamamos factor de trabajo de un pie a la fracción del tiempo en que ese pie está en contacto con el suelo en relación con la duración del paso. Para una persona caminando a velocidad constante, el factor de trabajo es del orden de 0,6, lo que quiere decir que durante el 60 % del tiempo de paso el pie está en contacto con el suelo. Por lo tanto, sumados los tiempos en que alguno de los dos pies está en contacto con el suelo resulta 1,2, o 120 % de la duración de un paso. Este resultado quiere decir que durante un 20 % de la marcha los dos pies están en contacto con el suelo. Por el contrario, cuando una persona corre, su factor de trabajo es del orden de 0,3, lo que implica que durante el 40 % del tiempo ambos pies están en el aire (que resulta de restar al 100 % de la duración de un paso el 60 % en el que alguno de los pies está en contacto con el suelo, suponiendo que, en carrera, nunca lo están los dos simultáneamente). En general, **llamamos carrera a una sucesión de pasos con factores de trabajo inferiores a 0,5 (hay un intervalo de tiempo en el que ambos pies están en el aire) y marcha cuando el factor de trabajo es superior a 0,5 (hay un intervalo de tiempo en el que ambos pies están sobre el suelo).**

Un animal que corre y, por lo tanto, pasa por momentos en los que todas las extremidades están en el aire, no está en equilibrio, como tampoco lo está cuando una sola de ellas está en contacto con el suelo, sea marchando o corriendo. Las desviaciones del equilibrio se van corrigiendo mediante apoyos sucesivos de las extremidades, pero si el animal mueve lentamente sus músculos, como en el caso de la tortuga, puede no tener tiempo de recobrar el equilibrio antes de caerse, por lo que éste necesita preservarse en todos los instantes de la marcha. Una persona o un ave, que tienen los pies grandes, se mantienen en equilibrio sobre dos extremidades y, con algo más de esfuerzo, también sobre una, pero los animales de pies pequeños necesitan, para estar en equilibrio, tener al menos tres de ellos sobre el suelo formando un triángulo que contenga la vertical del centro de gravedad. Así, un animal lento se desplaza moviendo una sola extremidad a la vez y dejando que las otras tres mantengan el equilibrio, tal y como puede verse en la figura 4.39.

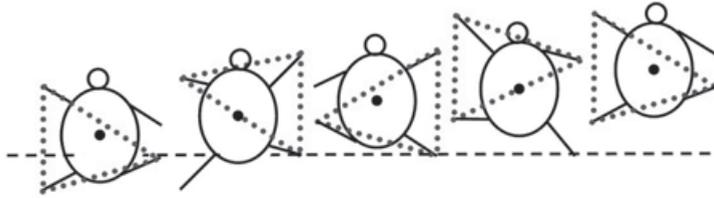


Fig. 4.39. Desplazamiento de un cuadrúpedo manteniendo su centro de gravedad siempre sobre la superficie de sustentación. Alexander (1982).

Un movimiento así implica que cada pie esté en contacto con el suelo al menos las tres cuartas partes de la duración del paso, es decir, el factor de trabajo debe ser de 0,75 como mínimo. Cuanto mayor sea este factor más lenta es la marcha pero también el equilibrio es más estable. Los insectos, como ya indicamos en la sección 4.1.8, tienen siempre tres de sus seis patas sobre el suelo para asegurar el equilibrio, lo que implica que el factor de trabajo es superior a 0,5, mientras que para las tortugas es del orden de 0,8.

4.3.2 La marcha y la carrera en los humanos

Marcha

Veamos la marcha de los humanos con un modelo muy sencillo, llamado de péndulo invertido, en el que se considera que las piernas permanecen rectas mientras caminan, algo bastante próximo a la realidad. **El centro de masas de la persona y cualquier punto del tronco o la cabeza describen arcos de circunferencia de radio igual a la longitud de la pierna, subiendo y bajando**, tal y como se aprecia en la figura 4.40.

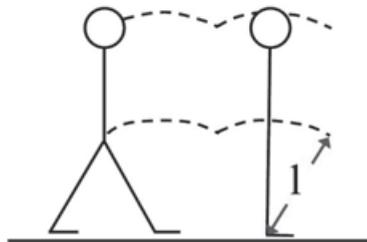


Fig. 4.40. Esquema de la marcha de una persona.

Cuando una de las piernas está en posición vertical, tal como se esquematiza en la figura 4.41, el centro de masas se está moviendo con una aceleración centrípeta, dirigida hacia el punto de apoyo del pie, igual a $\frac{v^2}{l}$, donde v es la velocidad de desplazamiento y l es la longitud de la pierna. Al no estar el pie pegado ni

enganchado al suelo, el caminante no puede tirar de él e imprimirse un aceleración hacia abajo distinta de la gravedad. Por lo tanto, la aceleración centrípeta no puede ser en ningún caso superior a la gravedad, de donde se sigue que:

$$\frac{v^2}{l} \leq g$$

$$v \leq \sqrt{l \times g} \quad (4.19)$$

Tomando ahora una longitud de pierna de 85 cm, resulta que la velocidad máxima a la que se puede caminar es de unos 2,9 m/s, que es una marcha bastante rápida (unos 10,4 km/h). Los marchadores de competición llegan hasta los 4 m/s utilizando una técnica que, mediante movimientos exagerados de la cadera acompañados con el movimiento de las piernas, nivela el desplazamiento de la parte superior del cuerpo, con arcos menos pronunciados, lo que implica que el radio de curvatura efectivo de dichos arcos es superior a la longitud de la pierna y, en consecuencia, de acuerdo con la expresión (4.19), la velocidad máxima es también superior.

Transición marcha-carrera

Si una persona quiere moverse más rápido no puede ya caminar, sino que tiene que romper a correr. La velocidad de transición de la marcha a la carrera es en los adultos de unos 2 m/s, próxima a la velocidad máxima deducida en la ecuación (4.19). Los niños, con una longitud de pierna menor, deben empezar a correr a velocidades menores. Una consecuencia de la existencia de este límite a la velocidad de marcha es que en un medio con gravedad distinta, la velocidad de transición también es distinta. Así, en la Luna, con una aceleración de la gravedad de 1,6 m/s², la velocidad límite es tan sólo de 1,2 m/s, lo que explica el llamativo movimiento a saltos de los astronautas sobre la Luna incluso a velocidades muy moderadas.

La transición marcha-carrera y la velocidad óptima durante la marcha vienen determinadas por una cantidad sin dimensiones llamada número de Froude, que se define como:

$$N_{Fr} = \frac{v}{\sqrt{gl}} \quad (4.20)$$

De las ecuaciones (4.19) y (4.20) se obtiene que, durante la marcha, $N_{Fr} < 1$. En realidad, la transición suele darse, en la mayoría de los animales, para $N_{Fr} \approx 0,7 \sim 0,8$, lo que puede entenderse con el modelo del péndulo invertido a que hemos hecho referencia anteriormente.

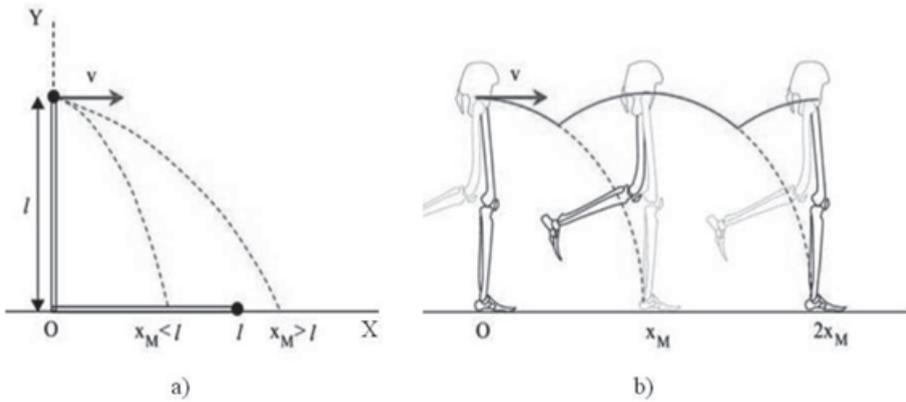


Fig. 4.41. a) Péndulo invertido. Dependiendo de la velocidad, el extremo superior de la extremidad caerá a una distancia inferior o superior a su propia longitud. En este último caso, la base del péndulo (el pie) debe desprenderse del suelo y estaría en situación de carrera. b) La longitud de zancada es del orden del doble del alcance en caída libre del extremo superior de la extremidad.

En efecto, consideremos el punto de inserción en la cadera de la extremidad, que está a una altura sobre la horizontal, l , igual a su longitud. Ese punto se mueve a una velocidad v y está unido al pie por una varilla (la extremidad) de longitud fija. Si su movimiento en el campo gravitatorio es tal que la distancia en horizontal del punto de caída a la posición que ocupaba el pie inicialmente es igual o menor a la longitud de la extremidad, entonces el extremo inferior de ésta no necesita desprenderse del suelo, tal como se muestra en la figura 4.41.a. Si, por el contrario, la velocidad v es tan grande que dicha distancia es superior a la longitud de la extremidad, entonces ésta debe despegar del suelo antes de que la otra se apoye, pasándose al régimen de carrera. Recordando la ecuación (1.14), que nos da la trayectoria parabólica de un cuerpo en el campo gravitatorio terrestre, y sustituyendo los valores $y_0 = l$, $v_{ox} = v$, $v_{oy} = 0$, tendremos:

$$y = l - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v^2}$$

y el alcance máximo x_M será la abscisa del punto de la trayectoria con $y = 0$, es decir:

$$x_M = \sqrt{\frac{2lv^2}{g}}$$

La transición marcha carrera tendrá lugar cuando $x_M = l$, es decir:

$$\sqrt{\frac{2lv^2}{g}} \approx l$$

$$N_{Fr} = \frac{v}{\sqrt{gl}} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7$$

que es el resultado observado para la mayoría de los animales. En el caso de los humanos, ese valor corresponde a los 2 m/s aproximadamente.

La longitud de paso λ será igual al doble del alcance máximo x_M , como puede verse en la figura 4.41.b. Se tiene, por lo tanto, la siguiente relación:

$$\lambda \approx 2x_M$$

$$\frac{\lambda}{l} \approx 2 \frac{x_M}{l} = 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{v^2}{gl}} = 2\sqrt{2} \times N_{Fr}$$

Experimentalmente se observa una relación de proporcionalidad aproximada entre la longitud de paso, medida en unidades de la longitud de la extremidad, y el número de Froude, con una constante de proporcionalidad del orden de 2,5, muy cerca de la obtenida en la expresión anterior. Como el número de Froude que marca la transición entre carrera y marcha es del orden de $\frac{1}{\sqrt{2}}$, el cociente $\frac{\lambda}{l}$ resulta ser del orden de 2 en dicha transición, tal y como se ha observado experimentalmente en multitud de animales (ver la figura 4.42).

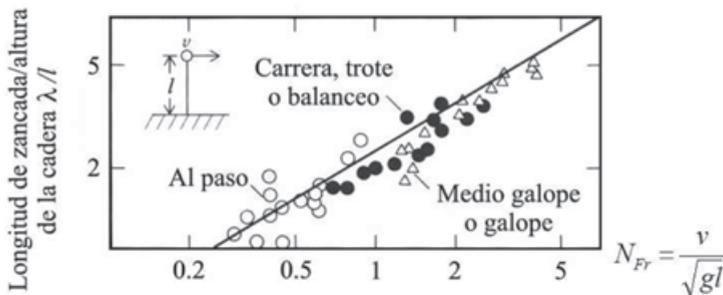


Fig. 4.42. Razón entre la longitud de zancada y la altura de la cadera en función del número de Froude. Alexander (1977).

El cociente $\frac{\lambda}{l}$ puede estimarse para los dinosaurios a partir de las huellas encontradas (longitud de paso) y los esqueletos fosilizados (longitud de la

extremidad), resultando que, salvo en los más pequeños, su valor se encuentra siempre por debajo de 2, lo que sugiere que marchaban en lugar de correr. A esta misma conclusión se llega mediante razonamientos basados en la energética del movimiento. En realidad, es posible medir el cociente $\frac{\lambda}{l}$ a partir únicamente de las huellas dejadas por los dinosaurios, ya que la longitud de paso se mide directamente como la distancia entre huellas sucesivas del mismo pie y se observa empíricamente que la altura de la cadera es proporcional al tamaño longitudinal de la huella del pie, con un factor del orden de 4. Es decir:

$$l \approx 4H \tag{4.21}$$

siendo H la longitud del pie. Algunos autores proponen coeficientes algo distintos, por ejemplo $l = 4,6H$ para los dinosaurios pequeños ($H < 0,25m$) y $l = 5,7H$ para los grandes ($H > 0,25m$). Una vez obtenido el cociente a partir de las huellas, es posible calcular su velocidad de desplazamiento:

$$v = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{gl} \frac{\lambda}{l} = \frac{\sqrt{2}}{4} g^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} \lambda \tag{4.22}$$

La expresión precedente reproduce bastante bien las relaciones entre velocidad, longitud de paso y altura de las caderas en experimentos con animales. Sin embargo, estos experimentos muestran empíricamente que es posible aproximar mejor los resultados con una expresión parecida en la que el coeficiente constante se sustituye por una función sencilla de $\frac{\lambda}{l}$, en particular la siguiente:

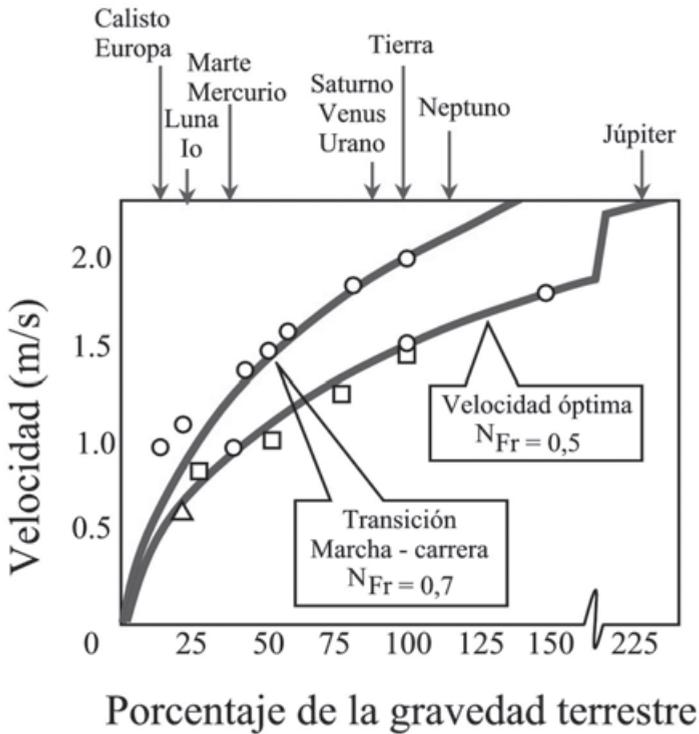
$$v = 0,25 \left(\frac{\lambda}{l} \right)^{0,67} g^{\frac{1}{2}} l^{-\frac{1}{2}} \lambda = 0,25 g^{\frac{1}{2}} l^{-1,17} \lambda^{1,67} \tag{4.23}$$

Nótese que $0,25 \left(\frac{\lambda}{l} \right)^{0,67}$ toma un valor que no se diferencia mucho de $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ en la transición marcha-carrera. La velocidad de marcha más cómoda es menor que la de transición con la carrera, alcanzándose en la mayoría de los animales cuando el número de Froude vale 0,3-0,5, es decir, unos 0,9 m/s-1,4 m/s en el caso de los humanos, que es un intervalo que cubre desde la velocidad normal de paseo hasta una velocidad de marcha bastante exigente.

Despejando ahora la velocidad de (4.20):

$$v = N_{Fr} \times \sqrt{gl}$$

podemos estimar la velocidad de transición marcha-carrera y la velocidad óptima de marcha en el caso de aceleraciones de la gravedad distintas de la terrestre, por ejemplo en otros planetas. También pueden simularse condiciones de gravedad distintas a la terrestre en los momentos de aceleración ascendente o descendente en vuelos de avión, obteniéndose resultados experimentales que se ajustan a las predicciones, como puede verse en la figura 4.43.



extremidades con la superficie, debido a su carácter rugoso, como en los pies y manos de los primates, o a la existencia de uñas que se clavan en la madera generando una fuerza intensa similar a la fricción. Algunas lagartijas, salamangas e insectos pueden desplazarse por superficies verticales pulidas e incluso mantenerse sobre techos en posición invertida gracias a que sus pies poseen propiedades adhesivas.

Pero la compensación del peso con la fuerza de rozamiento de una sola pareja de extremidades no es suficiente para mantener el equilibrio en posición vertical, ya que, como puede verse en la figura 4.44, el animal giraría y se caería hacia atrás debido al momento no nulo de estas dos fuerzas.

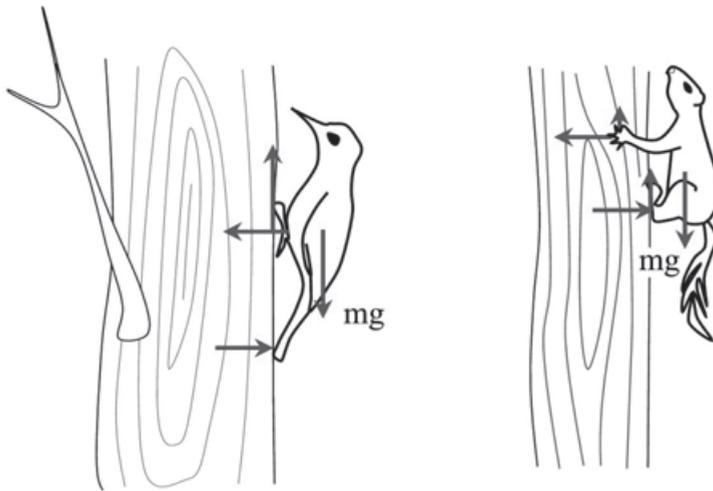


Fig. 4.44. a) Pájaro en equilibrio en posición vertical. b) Ardilla en equilibrio en posición vertical.

Veamos las fuerzas que actúan sobre una ardilla o un primate que trepa por un árbol. El peso se aplica a lo largo de una línea que pasa por su centro de gravedad, mientras que la fuerza de rozamiento entre las extremidades inferiores y el tronco se aplica en los puntos de contacto, por lo que hay un momento distinto de cero que provocaría un giro y la caída hacia atrás. Por eso el animal se agarra con las extremidades superiores al tronco, con las uñas o gracias a la superficie rugosa de las manos, y tira de él generando una fuerza de contacto del árbol sobre el animal que va en sentido contrario y se aplica al punto de contacto de dichas extremidades con el tronco. Por supuesto, si la fuerza se ejerce sólo por fricción con la superficie de la mano y no clavando las uñas, los brazos tienen que ser suficientemente largos en comparación con el diámetro del tronco como para que las fuerzas de contacto más las de

rozamiento tengan una resultante que tire del animal hacia el árbol. Al tiempo, se empuja con las extremidades inferiores generando, de nuevo, una fuerza de contacto en sentido contrario. El par de ambas fuerzas de contacto va en sentido contrario al anterior y puede compensarlo exactamente alcanzándose así el equilibrio.

Los pájaros trepadores pueden mantenerse en equilibrio en posición vertical mediante un juego de fuerzas similar, tirando del tronco con las uñas de sus patas y empujando al tiempo con su cola.

4.4 Ejercicios propuestos

Ejercicio 4.1 *Calcular el momento de inercia de una varilla cuya densidad lineal es del tipo $f = \lambda x$ (bate de béisbol) respecto de un eje perpendicular que pasa por su centro de masas.*

$$\text{Sol.: } I = \frac{1}{18} ML^2$$

Ejercicio 4.2 *Calcular el momento de inercia de un disco circular homogéneo de radio R respecto del eje perpendicular al plano que lo contiene que pasa por su centro. Podemos considerar el disco como una superposición de anillos circulares de radio r y anchura dr .*

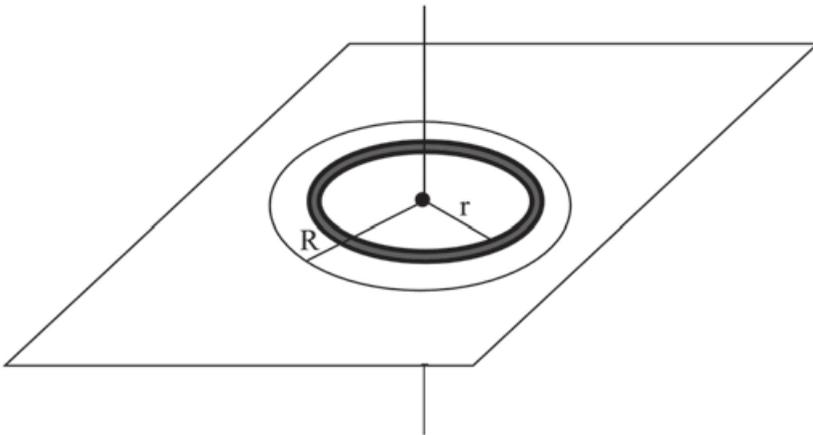


Fig. 4.45. Cálculo del momento de inercia de un disco alrededor de un eje perpendicular que pasa por su centro.

La masa de uno de los anillos será:

$$dm = \sigma \times 2\pi r dr$$

donde σ es la densidad superficial. La masa total del disco será:

$$M = \int_0^R dm = 2\pi\sigma \int_0^R r dr = \pi\sigma R^2$$

Como todos los puntos del anillo están a la misma distancia del eje, el valor de su momento de inercia es inmediato:

$$I = \int dm \times r^2$$

y basta ahora integrar en r desde 0 hasta el radio R del disco para obtener el momento de inercia.

$$\text{Sol.: } \frac{1}{2}MR^2$$

Como esta expresión no depende del espesor, es aplicable también a un cilindro de cualquier altura y cuya base tenga el mismo radio R .

Ejercicio 4.3 Calcular el momento de inercia de una esfera de radio R (procédase del mismo modo que en el caso anterior sólo que ahora se empieza por coronas esféricas de espesor diferencial con centro en el centro de la esfera).

$$\text{Sol.: } I = \frac{2}{5}MR^2$$

Ejercicio 4.4 Calcular el momento de inercia de una moneda (que se aproximará como un círculo plano) cuando se la hace girar sobre una mesa, es decir, respecto de un eje contenido en el plano de la moneda que pasa por su centro.

$$\text{Sol.: } I = \frac{1}{4}MR^2$$

Ejercicio 4.5 Se hace girar una moneda de dos euros (1,25 cm de radio y 4 gr de masa) alrededor de un eje contenido en el plano de la moneda y que pasa por su centro. Para ello, partiendo del reposo, se aplica un par de fuerzas con los dedos durante 0,1 segundos y como resultado empieza a girar con una frecuencia de 10 revoluciones por segundo. Calcular la fuerza aplicada sobre los bordes de la moneda.

$$\text{Sol.: } F = 0,39 \text{ N}$$

Ejercicio 4.6 Se empuja una puerta para hacerla girar alrededor del eje que coincide con su arista más larga aplicando una fuerza F constante sobre

la arista contraria y perpendicular al plano de la puerta durante un tiempo t a partir del reposo. Calcular la velocidad angular que adquiere al cabo de dicho tiempo. Si la masa de la puerta es de 20 kg, su anchura $L=1\text{ m}$ y le aplicamos una fuerza de 200 N durante una décima de segundo, ¿cuál es la velocidad angular resultante y el tiempo necesario para completar un giro de 90° ?

$$\text{Sol.: } \omega = \alpha t = \frac{3F}{ML}t = 3 \text{ rad/s}; t = 0,5 \text{ s}$$

Ejercicio 4.7 El ala de un insecto se puede aproximar por un rectángulo de 0,1 g de masa y 1 cm de longitud. El momento de inercia del ala respecto de un eje de giro que pasa por el lado de inserción en el tronco es igual al de la puerta que gira sobre uno de sus lados ya calculado en este capítulo. Calcular el momento de la fuerza muscular necesaria para imprimir al ala una aceleración angular $\alpha = 100 \text{ rad/s}^2$. Si el músculo que bate el ala tira desde un punto situado a 1 mm del borde del ala con un ángulo de inserción de 30° , calcular la fuerza que ejerce.

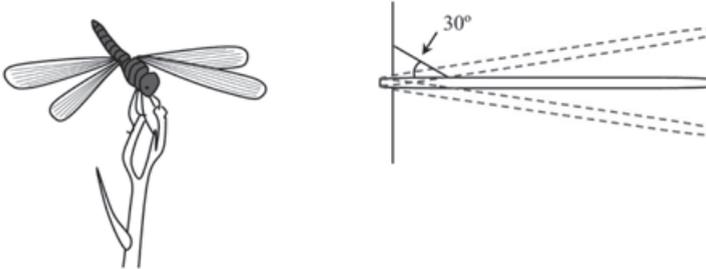


Fig. 4.46. Insecto con alas rectangulares que giran alrededor de uno de sus bordes.

$$\text{Sol.: } \Gamma = 0,33 \times 10^{-6} \text{ kg} \times \text{m}^2 \text{ s}^{-2}; F = 0,00067 \text{ N}$$

Ejercicio 4.8 Un saltador de trampolín salta a la piscina de forma que, en el despegue, su centro de masas está a una altura de 1 m sobre la tabla que, a su vez, está a 3 m sobre la superficie del agua. Su velocidad inicial forma un ángulo de 45° con la horizontal y su módulo es tal que el punto más alto de la trayectoria del centro de masas está 0,5 m por encima de la altura de partida. Calcular la velocidad inicial y el tiempo que tarda el centro de masas en llegar al agua.

$$\text{Sol.: } v_0 = 4,43 \text{ m/s}; t = 1,28 \text{ s}$$

Si se mantuviera estirado durante todo el recorrido caería de cabeza después de haber realizado medio giro. Calcular la velocidad angular alrededor de su eje de giro (perpendicular al plano de la trayectoria y pasando por el centro de masas del saltador).

Sol.: $\omega_0 = 2,45 \text{ rad/s}$

Ejercicio 4.9 Si quiere realizar un salto mortal, es decir, caer de cabeza después de un giro y medio, su velocidad angular debe triplicarse, para lo cual debe disminuir su momento de inercia en un factor 3. Aproximaremos la forma del saltador por un cilindro de altura $h_0 = 1,80 \text{ m}$ y radio de la base $R_0 = 0,12 \text{ cm}$ (verificar que la masa del saltador es de 80 kg). El momento de inercia de un cilindro homogéneo alrededor de un eje perpendicular a su eje de simetría que pasa por su centro de masas es $I = \frac{1}{4} M \left(R^2 + \frac{h^2}{3} \right)$.

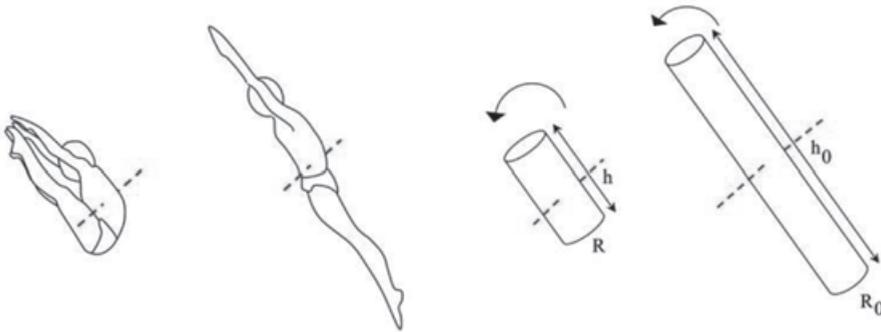


Fig. 4.47. Saltador de trampolín que se pliega para disminuir su momento de inercia y aumentar su velocidad de giro. Los cilindros que representan las dos posiciones sirven para hacer cálculos aproximados de manera simple.

Nótese que, en el límite $R \rightarrow 0$, el cilindro tiende a una varilla, mientras que en el límite $h \rightarrow 0$, tiende a un círculo que gira alrededor de uno de sus diámetros. En ambos límites, el momento de inercia que se obtiene coincide con los que ya hemos calculado para esos casos particulares.

Para disminuir su momento de inercia el saltador se pliega por la cintura y adopta la forma de un cilindro de altura $h = \frac{h_0}{2} = 0,90 \text{ m}$. Encontrar el radio de su base R para que la masa sea la misma en ambas configuraciones y verificar que con los nuevos valores de h y R el momento de inercia, en posición plegada, es aproximadamente un tercio del que tenía en posición extendida.

Sol.: $R = 0,17 \text{ m}$; $\frac{I}{I_0} \approx \frac{1}{3}$

Ejercicio 4.10 Sea una barra rígida homogénea apoyada en uno de sus extremos a una pared y en el otro al suelo formando un ángulo θ con la horizontal. Suponiendo que el coeficiente de rozamiento estático de la barra

con ambas superficies es igual a μ_0 , se puede calcular el ángulo a partir del cual la barra desliza y cae hasta la posición horizontal. En efecto, sobre la barra actúan las siguientes fuerzas: el peso, aplicado en su centro, las dos fuerzas de contacto, normales a las dos superficies de apoyo y aplicadas en los extremos, y las fuerzas de rozamiento, aplicadas también en los extremos y en dirección contraria al movimiento de ambos puntos inducido por el peso. En la figura 4.48 puede verse la disposición de todas las fuerzas.

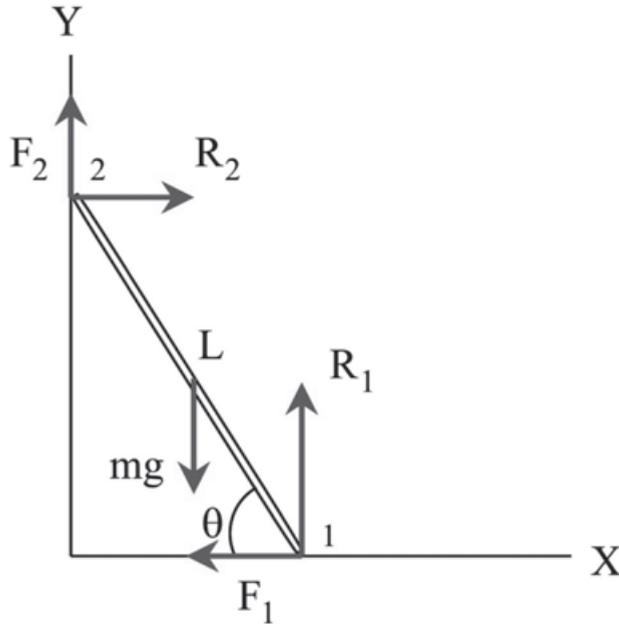


Fig. 4.48. Barra en equilibrio por el rozamiento de sus extremos sobre una pared y el suelo.

Tomando como origen para el cálculo de momentos el punto 2, las condiciones de equilibrio son:

$$F_2 + R_1 - mg = 0 \quad (4.24)$$

$$R_2 - F_1 = 0 \quad (4.25)$$

$$R_1 L \cos \theta - F_1 L \sin \theta - mg \frac{L}{2} \cos \theta = 0 \quad (4.26)$$

Las fuerzas de rozamiento F_i tienen un valor máximo igual al coeficiente μ_0 multiplicado por las fuerzas normales que mantienen en contacto los extremos de la barra con la pared y el suelo, fuerzas que son iguales en módulo a las fuerzas de contacto R_i . Por lo tanto, en el caso límite de un

ángulo que sea el mínimo posible antes de que la barra deslice, las fuerzas de rozamiento tendrán su valor máximo, $F_i = \mu_o R_i$. Sustituyendo ahora en las ecuaciones (4.24-26), podemos despejar R_i y θ_m .

$$\begin{aligned} \text{Sol.: } R_1 &= \frac{mg}{1 + \mu_0^2} \\ R_2 &= \frac{\mu_0 mg}{1 + \mu_0^2} \\ \text{tg } \theta_m &= \frac{R_1 - \frac{1}{2}mg}{\mu_0 R_1} = \frac{1 - \mu_0^2}{2\mu_0} \end{aligned} \tag{4.27}$$

Es decir, el ángulo a partir del cual la barra desliza es función únicamente del coeficiente de rozamiento y, por lo tanto, la expresión (4.27) proporciona un modo sencillo de medir dicho coeficiente entre dos materiales. Si, por ejemplo, la barra comienza a deslizar cuando $\theta_m = 45^\circ$, el coeficiente de rozamiento μ_o resulta ser 0,41. Nótese que cuando $\mu_o = \geq 1$ la barra se sujeta con cualquier ángulo ya que $\text{tg } \theta_m$ es negativo.

Ejercicio 4.11. Repetir el caso anterior pero ahora suponiendo que la barra es una escalera sobre la que hay una persona de masa m a una distancia $d = xL$ del punto de apoyo en la pared. Se supondrá que la escalera tiene una masa despreciable respecto de m . El ejercicio se resuelve de la misma forma, pero ahora el peso del sistema persona-escalera se aplica en el punto en el que está la persona.

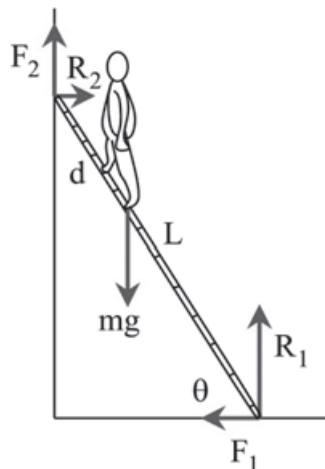


Fig. 4.49. Escalera en equilibrio por el rozamiento de sus extremos con una pared y el suelo. La persona está a una distancia d del punto de apoyo en la pared. La longitud de la escalera es L .

$$\text{Sol.: } \operatorname{tg} \theta_m = \frac{1 - x(1 + \mu_0^2)}{\mu_0}$$

Nótese que cuando $x = \frac{1}{2}$ se recupera el resultado del ejercicio anterior. Si, por ejemplo, el coeficiente de rozamiento es $\mu_0 = 0,5$, entonces $\operatorname{tg} \theta_m = 2 - 2,5x$, lo que implica que para x pequeño (cerca del apoyo en la pared) la escalera tiene que estar empinada: para $x = 0,1$, $\operatorname{tg} \theta_m \approx 60^\circ$, mientras que la escalera se mantiene en cualquier ángulo siempre que $x \geq \frac{2}{2,5} = 0,8$. Si, por el contrario, $\mu_0 = 1,25$, entonces $\operatorname{tg} \theta_m = 0,8 - 2,05x$. En este caso, la escalera se mantiene en equilibrio con cualquier ángulo siempre que $x \geq \frac{0,8}{2,05} = 0,39$ y si la persona quiere situarse a una distancia del apoyo en la pared tal que $x = 0,1$, entonces $\operatorname{tg} \theta_m = 0,595$ y la escalera tendrá que apoyarse con un ángulo superior a unos 30° .

Ejercicio 4.12 Dos personas sujetan un cuerpo homogéneo con forma de paralelepípedo en una escalera con un ángulo de inclinación α . Encontrar la expresión general de las fuerzas F_1 y F_2 que hay que aplicar a los extremos más alto y más bajo, respectivamente, en función de la longitud del cuerpo L y de su altura d .

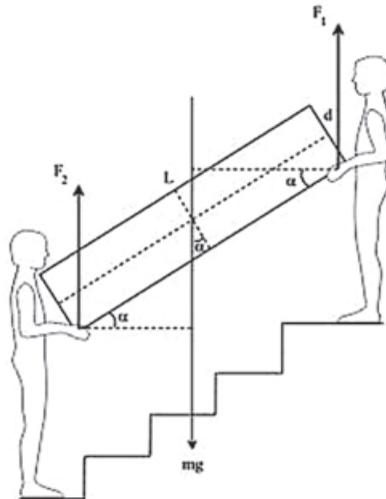


Fig. 4.50. Esquema de fuerzas de dos personas sujetando un objeto con forma de paralelepípedo y un ángulo de inclinación α respecto de la horizontal.

$$\text{Sol.: } F_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{d}{L} \operatorname{tg} \alpha \right) mg ; \quad F_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{d}{L} \operatorname{tg} \alpha \right) mg$$

Obsérvese que la fuerza que hace la persona que está en el escalón más bajo es siempre mayor que la que ejerce la que está en el escalón más alto. Obsérvese también que cuando $d = 0$ el cuerpo tiende a un tablón de espesor cero y, entonces, las dos fuerzas son iguales a la mitad del peso del cuerpo. Cuando $d > \frac{L}{\operatorname{tg} \alpha}$ la fuerza F_1 se hace negativa. Explicar por qué. Aplicar las expresiones generales al caso en que $L = 1,20 \text{ m}$, $d = 0,20 \text{ m}$ y $\alpha = 45^\circ$.

$$\text{Sol.: } F_1 = 327 \text{ N} = (33 \text{ kg}) \times g ; \quad F_2 = 457 \text{ N} = (47 \text{ kg}) \times g$$

Ejercicio 4.13 Una persona de está de pie con la espalda y los talones pegados a la pared. La vertical de su centro de masas cae a 10 cm de la pared y la planta del pie tiene 30 cm de longitud. Se le pone encima de los brazos estirados un peso cuyo centro de masas se proyecta en vertical sobre un punto que está 40 cm por delante de la puntera de los pies. Supuesto que todas las articulaciones son rígidas, ¿cuál es el peso máximo que puede aguantar sin caer hacia adelante?

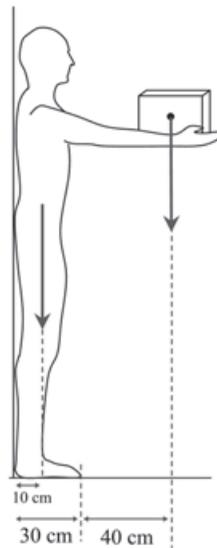


Fig. 4.51. Persona erguida con las articulaciones rígidas sujetando un cuerpo en sus manos.

$$\text{Sol.: } m = 35 \text{ kg}$$

Ejercicio 4.14 Consideremos un brazo plegado en ángulo recto contra una cierta fuerza, aplicada sobre la mano, según el esquema de la figura

4.52. En este caso el tríceps es el músculo que hace fuerza para extender el brazo, insertándose, por detrás del húmero, en el extremo del cúbito, de forma que al contraerse abre la articulación del codo.

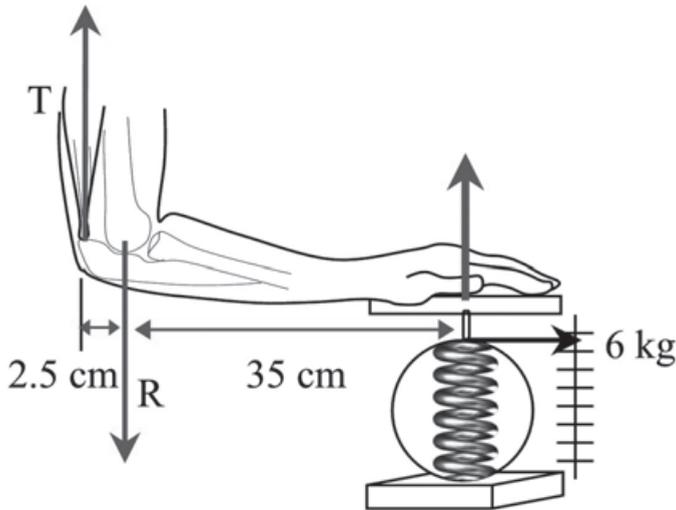


Figura 4.52 Brazo en ángulo recto empujando hacia abajo gracias a la acción del tríceps.

El punto de inserción se encuentra a unos 2,5 cm de la articulación y la dirección es prácticamente vertical. Si la balanza sobre la que se apoya la mano de la figura 4.52 marca 6 kg, la fuerza hacia arriba que está ejerciendo el muelle sobre la mano es de $6 \times 9,8 = 58,8$ N, aplicada en un punto que dista 35 cm del codo. Calcular la fuerza de contacto R del extremo del húmero sobre el antebrazo, necesariamente vertical, y la fuerza T que hace el tríceps hacia arriba.

Sol.: $T \approx 823$ N; $R \approx -912$ N

Ejercicio 4.15 Nos fijamos en el pie de una persona de 70 kg en reposo. Sobre él actúa la fuerza de contacto del suelo, igual a la mitad del peso del cuerpo y supondremos que está aplicada en un punto a 5 cm de la puntera; es decir, no reparte el peso en toda la superficie de los pies, sino que debe tirar del talón hacia arriba. La longitud total del pie es de 30 cm y los huesos de la pierna apoyan sobre los huesos tarsianos del pie en un punto situado a 25 cm de la puntera. Los músculos de la pierna, gastrocnemio y sóleo, que parten del fémur, la tibia y el peroné, tiran del hueso calcáneo, en el borde del talón, con un ángulo de inserción de 7° con la vertical. Si la altura a la que se sitúa el punto de contacto pierna-pie está a 5 cm de altura sobre la vertical, calcular la fuerza con que tira el grupo de músculos y la fuerza que ejercen los huesos de la pierna, tibia y peroné, sobre el pie en el punto de apoyo.

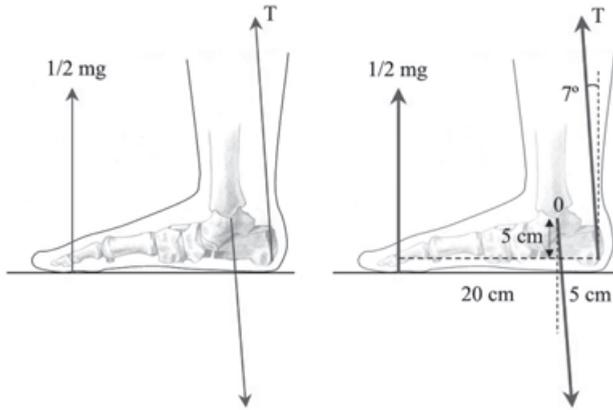


Fig. 4.53. Esquema de fuerzas sobre el pie cuando se apoya el cuerpo verticalmente sobre un punto situado a 5 cm de la puntera.

Sol.: $T = 1.576 \text{ N}$; $R_x = 192 \text{ N}$; $R_y = -1.907 \text{ N}$

Ejercicio 4.16 Repetir el ejercicio anterior pero suponiendo que la persona está en equilibrio con las piernas inclinadas un ángulo α con la vertical. Verificar que, para $\alpha = 0$, se recupera el resultado precedente y hacer el cálculo para $\alpha = 30^\circ$.

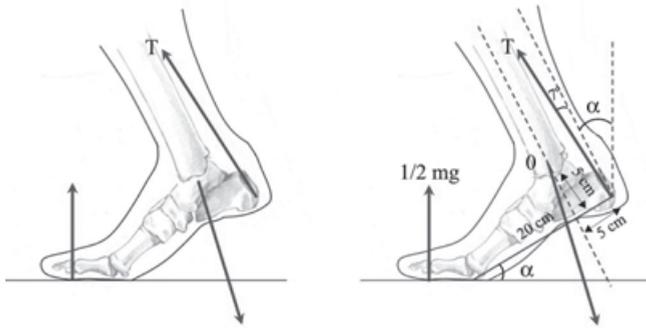


Fig. 4.54. Esquema de fuerzas sobre el pie cuando éste está formando un ángulo de 30° con la horizontal.

Sol.: $T = 1.382(\cos \alpha - 0,25 \text{ sen } \alpha)N$; $R_x = T \times \text{sen } (\alpha + 7^\circ)$;

$$R_y = -\frac{mg}{2} - T \times \cos(\alpha + 7^\circ)$$

$\alpha = 45^\circ$: $T = 836 \text{ N}$; $R_x = 659 \text{ N}$; $R_{ly} = -858 \text{ N}$

Ejercicio 4.17 Estudiamos el equilibrio de la columna vertebral y todo lo que ésta sustenta (tronco, cabeza y brazos) según el esquema de la figura 4.38 del texto de este capítulo. Escribir las ecuaciones del equilibrio tomando el momento de las fuerzas respecto del punto de apoyo, en el que se aplica la fuerza de contacto, y tomando como eje X la recta a lo largo de la columna y como eje Y el perpendicular a la columna. Calcular a partir de estas ecuaciones la fuerza muscular sobre la columna y las componentes de la fuerza de contacto R, tomando $m = 50$ kg, $M = 20$ kg y un ángulo de inclinación $\alpha = 45^\circ$.

$$\text{Sol.: } T = \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}10^\circ} \left(m + \frac{3}{2}M \right) g = 3190 \text{ N}; \quad R_x \approx 3630$$

Ejercicio 4.18 La figura 4.55 muestra dos conjuntos de huellas correspondientes a un dinosaurio bípedo. El tamaño de las huellas se ha multiplicado por dos en relación con la longitud del paso que proporciona la escala del dibujo. La serie a) corresponde a una longitud de paso (SL) $P_a = 2,70$ m, mientras la serie b) corresponde a un paso superior, que se ha de estimar a partir del dibujo. Utilizando las expresiones (4.21) y (4.23), calcular la altura de la cadera, la velocidad de desplazamiento y el número de Froude en ambas series de huellas, y el tipo de locomoción.

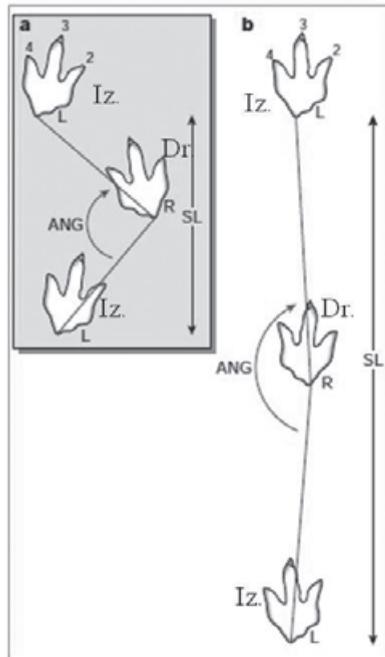


Fig. 4.55. Series de huellas de un dinosaurio bípedo.

Sol.: $l = 2 \text{ m}; v_a = 1,8 \text{ m/s};$

$v_b = 7,9 \text{ m/s}; N_{Fr}(a) = 0,4 \text{ (marcha)}; N_{Fr}(b) = 1,8 \text{ (carrera)}$

Ejercicio 4.19 Como todo el mundo sabe, el Principito (de Antoine de Saint-Exupéry) habita en el asteroide B612 y sus piernas tienen una longitud de 0,5 m aproximadamente. El asteroide tiene una densidad igual a la de la Tierra, $\rho = 5.518 \text{ kg/m}^3$, y un radio de 1 km. Calcular el tiempo mínimo que necesita el Principito para dar “la vuelta al mundo” andando. Recuérdese que la constante de la gravitación es $G = 6,673 \times 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$.

Sol.: $t = 90 \text{ horas}$

Ejercicio 4.20 Considérese un primate de masa m que se agarra con pies y manos a un árbol cuyo tronco circular tiene un radio R . El coeficiente de rozamiento estático de las plantas de pies y manos con el tronco del árbol es μ_o . El juego de fuerzas que actúa sobre el animal está representado en la figura 4.56.

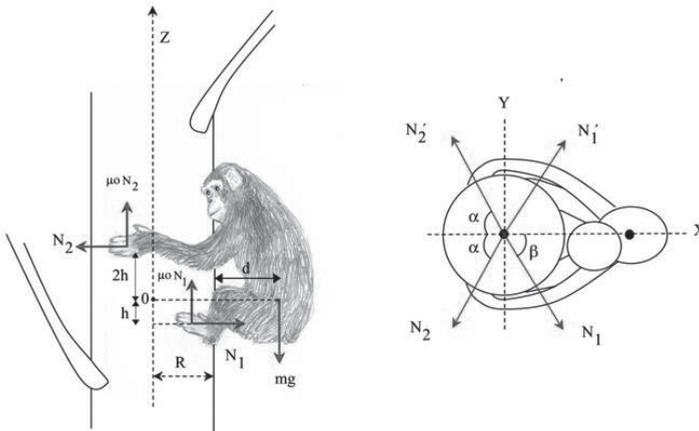


Fig. 4.56. Conjunto de fuerzas que actúan sobre un primate en equilibrio en un árbol. N_1 y N'_1 son las fuerzas de contacto sobre sus extremidades inferiores mientras que N_2 y N'_2 son las fuerzas de contacto sobre las anteriores. Tomamos como origen de posiciones el punto O situado en el eje del árbol, a la altura del centro de masas del primate.

Su expresión vectorial es la siguiente:

$$\vec{F}_1 = N_1 \cos \beta \vec{i} - N_1 \text{ sen} \beta \vec{j} + \mu_o N_1 \vec{k}$$

$$\vec{F}'_1 = N_1 \cos \beta \vec{i} + N_1 \text{ sen} \beta \vec{j} + \mu_o N_1 \vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = -N_2 \cos \alpha \vec{i} - N_2 \text{ sen} \alpha \vec{j} + \mu_o N_2 \vec{k}$$

$$\vec{F}'_2 = -N_2 \cos \alpha \vec{i} + N_2 \operatorname{sen} \alpha \vec{j} + \mu_0 N_1 \vec{k}$$

$$\vec{F}_p = -mg \vec{k}$$

Escogemos para tomar momentos de las fuerzas un punto situado en el eje del árbol a la altura del centro de masas del primate. El apoyo de los pies está a una distancia en vertical por debajo de este punto y el de las manos por encima. Las coordenadas de los puntos de apoyo y del centro de masas del animal son:

$$\vec{r}_1 = R \cos \beta \vec{i} - R \operatorname{sen} \beta \vec{j} - h \vec{k}$$

$$\vec{r}'_1 = R \cos \beta \vec{i} - R \operatorname{sen} \beta \vec{j} - h \vec{k}$$

$$\vec{r}_2 = -R \cos \alpha \vec{i} - R \operatorname{sen} \alpha \vec{j} + 2h \vec{k}$$

$$\vec{r}'_2 = -R \cos \alpha \vec{i} + R \operatorname{sen} \alpha \vec{j} + 2h \vec{k}$$

$$\vec{r}_p = -(R+0, 2) \vec{j}$$

Escribir las ecuaciones de equilibrio.

Sol.:

$$\sum F_x = 2N_1 \cos \beta - 2N_2 \cos \alpha = 0 \quad (4.28)$$

$$\sum F_z = 2\mu_0(N_1 + N_2) - mg = 0 \quad (4.29)$$

$$\sum \Gamma_y = -2\mu_0 R N_1 \cos \beta - 2h N_1 \cos \beta + 2\mu_0 R N_2 \cos \alpha - 4h N_2 \cos \alpha + mg(R+d) = 0 \quad (4.30)$$

Calcular ahora las fuerzas normales N_1 y N_2 y el coeficiente de rozamiento μ_0 resolviendo las ecuaciones (4.28-30):

$$\text{Sol.:} \quad N_1 = \frac{R+d}{6h \cos \beta} mg \quad (4.31)$$

$$N_2 = \frac{R+d}{6h \cos \alpha} mg \quad (4.32)$$

$$\mu_0 = \frac{3h \cos \alpha \cos \beta}{R+d \cos \alpha + \cos \beta} \quad (4.33)$$

Nótese que cuando el ángulo α es cero, la fuerza normal que se hace con las manos, N_2 , es mínima porque se está en la posición más favorable, con la fuerza de contacto empujando al animal contra el árbol. Por el contrario, cuando α tiende a 90° dicha fuerza normal tiende a infinito porque no se puede “abrazar” el tronco, ni siquiera parcialmente y no hay forma de sujetarse (estamos considerando que la fuerza de sujeción en vertical se debe únicamente al rozamiento entre las palmas de las manos y el árbol sin que se puedan hincar las uñas, como ocurre con otros animales) y generar una fuerza N_2 “tirando” de él.

Si particularizamos al caso $\beta = 0$, lo que quiere decir que los dos pies empujan justo en la parte más cercana de la circunferencia del árbol, y $R = h = d$, por ejemplo 20 cm, las expresiones (4.31-33) se simplifican a:

$$N_1 = \frac{mg}{3}$$

$$N_2 = \frac{mg}{3\cos\alpha}$$

$$\mu_0 = \frac{3 \cos\alpha}{2(1 + \cos\alpha)}$$

Para el caso óptimo, $\alpha = 0$, los resultados son $N_1 = N_2 = \frac{mg}{3}$ y el coeficiente de rozamiento, $\mu_0 = 0,75$, que es un valor típico de los mencionados en el capítulo precedente. En un caso menos favorable, $\alpha = 60^\circ$, los resultados son $N_1 = \frac{1}{3}mg$, $N_2 = \frac{2}{3}mg$ y $\mu_0 = 0,50$.

4.5 Referencias

- Aguilar Gutiérrez, M. *Biomecánica: La Física y la Biología*. CSIC, 2000
- Alexander, R. McN.: “Mechanics and scaling of terrestrial locomotion”. En *Scale effects in animal locomotion*, T. J. Pedley (ed.), Academic Press, 1977
- Alexander, R. McN.: *Locomotion of Animals*. Blackie, 1982
- Alexander, R. McN.: *Mechanics and Energetics of Animal Locomotion*. Chapman&Hall, 1977
- Alexander, R. McN.: “Estimates of the speed of Dinosaurs”. *Nature* **261** (1976) 129

- Benedek, G. B. & Villars, F. M. H. *Physics, with illustrative Exemples from Medicine and Biology*. Addison Wesley, 1973
- Cavagna, G. A. *et al.*: “Walking on Mars”. *Nature* **393** (1998) 636
- Day, J. J. *et al.*: “Dinosaur locomotion from a new trackway”. *Nature* **415** (2002) 494
- Frohlich, C. “Física del salto mortal y del salto en tirabuzón”. *Investigación y Ciencia* (Mayo, 1980) 90
- Minetti, A. E. “Biomechanics: Walking on other planets”. *Nature* **409** (2001) 467
- McMahon, T. A. & Bonner, J. T. *Tamaño y Vida*. Labor, 1986
- Mochon, S. & McMahon, T. A. “Ballistic Walking”. *J. Biomechanics* **13** (1980) 49
- Renous, S.: *Locomotion*. Dunod
- Thibodeau, G. A. & Patton, K. T. *Estructura y función del cuerpo humano*. Harcourt Brace, 1998
- Thulborn, T. *Dinosaur tracks*. Chapman & Hall, 1990
- Williams, M. & Lissner, H. R. *Biomechanics of Human Motion*. W. B. Saunders Co., 1962
- Wirhed, R.: *Habilidad atlética y anatomía del movimiento*. Edika-Med, 1989

Capítulo 5. Trabajo y energía. La tasa metabólica

5.1 Trabajo y energía cinética

Introduciremos en esta sección nuevas magnitudes, algunas de las cuales tienen la propiedad de ser constantes del movimiento en circunstancias muy comunes. Se trata del trabajo, la energía y la potencia, que formalizan y definen de forma cuantitativa nociones ya existentes en el lenguaje ordinario.

5.1.1 Trabajo y potencia

Trabajo

Cuando un cuerpo se desplaza por la acción de una fuerza, definiremos el trabajo infinitesimal realizado por esa fuerza a lo largo de un elemento diferencial de la trayectoria del siguiente modo:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.1)$$

donde el punto indica producto escalar de los vectores \vec{F} y \vec{r} . **El trabajo es, por lo tanto, una magnitud escalar igual al producto del módulo de la fuerza por el módulo del desplazamiento y por el coseno del ángulo que forman ambos vectores.** O, lo que es lo mismo, igual al módulo del desplazamiento por la componente tangencial de la fuerza.

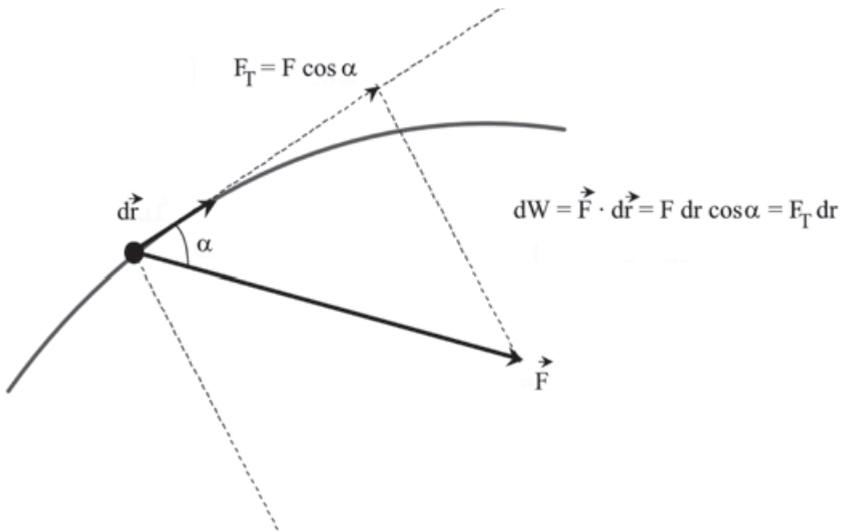


Fig. 5.1. Fuerza y trabajo a lo largo de una trayectoria.

El trabajo realizado por una fuerza a lo largo de una trayectoria finita será, simplemente, la integral de los trabajos correspondientes a cada elemento infinitesimal de la trayectoria:

$$W = \int dW = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.2)$$

Cuando se aplica, por ejemplo, una fuerza vertical para elevar un peso, el trabajo es igual al módulo de la fuerza aplicada por la altura alcanzada. Si el cuerpo se eleva a velocidad constante, la fuerza que hay que aplicar es simplemente igual a su peso. Existe, por lo tanto, en este caso y en otros, relación entre la magnitud introducida en la expresión (5.1) y la noción de trabajo en la vida cotidiana.

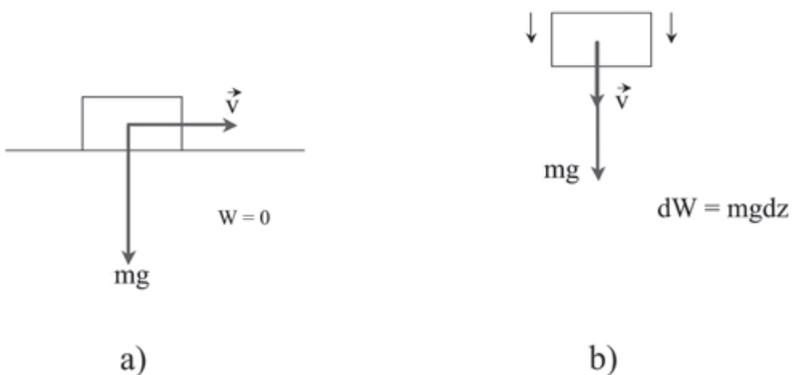


Fig. 5.2. Trabajo realizado por la fuerza de la gravedad sobre un cuerpo:

- cuando se mueve horizontalmente con velocidad uniforme,
- cuando se mueve verticalmente por la acción de dicha fuerza.

De la definición (5.1) se sigue que la fuerza centrípeta que impulsa a un móvil en un movimiento circular uniforme realiza un trabajo igual a cero debido a que es siempre perpendicular a la trayectoria, lo mismo que la fuerza de la gravedad que actúa sobre un cuerpo que se mueve sobre una superficie horizontal sin rozamiento, como puede verse en la figura 5.2.

Las dimensiones de la magnitud trabajo son las de fuerza multiplicada por distancia, es decir:

$$[W] = MLT^{-2} \times L = ML^2T^{-2}$$

y la unidad en el Sistema Internacional es el julio (J):

$$1J = 1N \times m = 1kg \times m^2s^{-2}$$

Ejemplo. El trabajo que hace la fuerza de la gravedad cuando hace deslizar un cuerpo sobre un plano inclinado es:

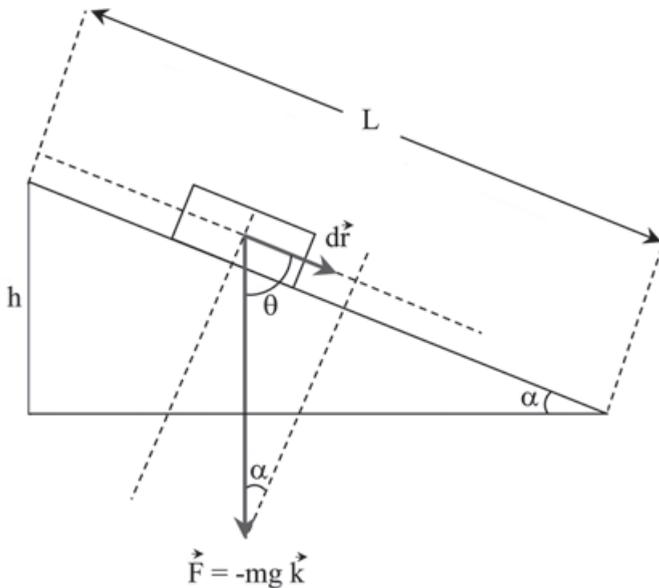


Fig. 5.3. Trabajo realizado por la fuerza de la gravedad sobre un cuerpo que desliza sobre un plano inclinado por la acción de dicha fuerza.

$$dW = mg \times |d\vec{r}| \times \cos \theta = mg \times ds \times \text{sen} \alpha$$

$$W = \int_0^L mg \times \text{sen} \alpha \times ds = mg \times \text{sen} \alpha \int_0^L ds = mg \times L \text{sen} \alpha = mgh$$

Por lo que el trabajo total depende únicamente de la altura y no del ángulo de inclinación. Si quisiéramos subir el peso desde el suelo a velocidad constante, en ausencia de rozamiento, la fuerza que hay que aplicar es exactamente igual a la componente tangencial del peso cambiada de signo y el trabajo que hay que hacer contra la gravedad es igual al que la gravedad hace para hacerlo deslizar hacia abajo: sólo depende de la altura a la que lo elevemos, independientemente del ángulo de la rampa, lo que resulta acorde con la experiencia cotidiana.

Para el caso de un objeto de 10 kg que se desliza a lo largo de una rampa con una diferencia de altura de 2 m, el trabajo que realiza la fuerza de la gravedad es:

$$W = 10 \times 9,8 \times 2 = 196 \text{ J}$$

que es igual al trabajo que tiene que hacer una fuerza externa para elevar esa masa, a velocidad constante, a la misma altura en contra de la gravedad.

Lo que sí varía es la longitud recorrida en un caso y en otro. Cuando la pendiente es grande hay que hacer mucha fuerza a lo largo de una distancia corta, mientras que cuando la pendiente es pequeña, la fuerza es menor, pero a lo largo de una distancia mayor, de forma que su producto es constante.

Para el caso $\alpha = 90^\circ$ la distancia recorrida es simplemente $s = h = 2 \text{ m}$, mientras que para $\alpha = 30^\circ$ la distancia recorrida es $s = 2 \times h = 4 \text{ m}$.

Potencia

Una misma cantidad de trabajo puede desarrollarse en periodos de tiempo diferentes. La magnitud que caracteriza el ritmo con el que se realiza una cierta cantidad de trabajo se llama potencia y se define como la cantidad de trabajo por unidad de tiempo. Como esta cantidad puede variar en cada instante a lo largo de la trayectoria, debemos definirla en términos diferenciales:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Las dimensiones de potencia son las de energía dividida por tiempo, siendo el vatio la unidad en el Sistema Internacional y W su símbolo:

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$$

En entornos industriales se utiliza también el kilovatio ($1 \text{ kW} = 10^3 \text{ W}$), el megavatio ($1 \text{ MW} = 10^6 \text{ W}$) y el gigavatio ($1 \text{ GW} = 10^9 \text{ W}$).

Otra unidad de potencia utilizada con frecuencia es el caballo de vapor (CV), introducida cuando la tracción animal era la principal fuente de trabajo mecánico y no existía un sistema coherente y preciso de unidades de medida. El caballo de vapor, definido como la potencia mecánica aproximada desarrollada por un caballo en los momentos de mayor esfuerzo sostenido, tiene un valor impreciso y depende de multitud de circunstancias, por lo que se ha traducido en términos de su equivalencia en vatios. El caballo de vapor (CV) introducido en Francia se definió como la potencia necesaria para elevar una masa de 75 kg un metro de altura en un segundo, por tanto $75 \times g = 735 \text{ W}$. Por el contrario, la misma unidad en Gran Bretaña (HP, de *horse power*) se fijó de forma algo distinta, por lo que su equivalencia es 746 W . Se trata de una potencia aproximadamente tres veces superior a la desarrollada por un ser humano promedio cuando realiza un ejercicio intenso y sostenido. Nosostros siempre utilizaremos las unidades del SI.

Un dispositivo que trabaje a una cierta potencia constante P desarrolla, en un intervalo de tiempo Δt , una cantidad de trabajo igual a $P \times \Delta t$. De ahí que se utilicen con frecuencia unidades de energía que son el producto de una potencia por un intervalo de tiempo. El más común es **el kilovatio hora, que es el trabajo realizado por un dispositivo de un kilovatio de potencia trabajando durante una hora**. De esta definición se sigue:

$$1 \text{ kWh} = 10^3 \text{ W} \times 3.600 \text{ s} = 3,6 \times 10^6 \text{ J}$$

De la misma forma que para la potencia, se usa también en entornos industriales el megavatio hora o el gigavatio hora como unidades de trabajo.

En el capítulo 23 se verá que una unidad de energía adecuada para describir fenómenos a escala atómica o molecular es el electronvoltio (eV), cuyo valor es de $1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$. En la tabla 5.1 se dan las equivalencias de estas y otras unidades de energía, como la caloría o el ergio, que se usarán a lo largo del libro o que son de uso común en ciertos contextos específicos.

Tabla 5.1. Algunas unidades de energía	
Unidad	Equivalencia en julios
ergio (erg)	10^{-7}
caloría (cal)	4,184
kilocaloría (kcal)	$4,184 \times 10^3$
kilovatio hora (kWh)	$3,6 \times 10^6$
electronvoltio (eV)	$1,60 \times 10^{-19}$
caballo de vapor-hora	$2,68 \times 10^5$

Observación. El kilovatio hora. De la equivalencia del kWh en julios puede obtenerse una idea de la cantidad de trabajo que supone. Veamos, por ejemplo, la masa m de un cuerpo que pueda ser elevado a una altura $h = 30$ m, equivalente a un edificio de unos 10 pisos, realizando un trabajo de 1 kWh:

$$1 \text{ kWh} = 3,6 \times 10^6 \text{ J} = m \times 9,8 \times 30$$

de donde, despejando m , queda:

$$m = 12.245 \text{ kg}$$

es decir, con la energía de 1 kWh se puede elevar a esa altura un peso de unas 12 toneladas.

Trabajo y potencia musculares

Consideremos un músculo de sección S y longitud l que se contrae en un 20 a 30 por ciento de su longitud, que es una contracción normal y, según hemos visto en el capítulo 2, permite que desarrolle el máximo de la fuerza muscular al estar activos todos los puentes de miosina. Recordando que la fuerza muscular típica por unidad de sección es de 300.000 N/m^2 y suponiendo que el músculo se contrae en un 20 por ciento de su longitud, el trabajo realizado durante una sola contracción es:

$$W = F \times 0,2l \approx 3 \cdot 10^5 \times S \times 0,2l = 0,6 \times 10^5 \times V \quad (5.3)$$

donde $V = S \times l$ es el volumen del músculo, supuesto que sea aproximadamente cilíndrico, y el resultado se expresa en julios si el volumen se expresa en metros cúbicos. El trabajo máximo que puede desarrollar un músculo por unidad de masa en una sola contracción será, por lo tanto:

$$\frac{W}{m} \approx 0,6 \times 10^5 \frac{V}{m} = \frac{0,6 \times 10^5}{\rho} = 60 \text{ J/kg} \quad (5.4)$$

En esta expresión se ha sustituido la densidad del músculo, ρ , por su valor, aproximadamente igual al del agua, es decir 1000 kg/m^3 . Este cálculo sencillo nos dice que **un músculo de un kilogramo de peso (el bíceps de un humano adulto tiene una masa de ese orden) puede hacer con facilidad un trabajo de unos 60 J en una sola contracción**, es decir, levantar un objeto de unos 6 kg de masa a un metro de altura. El valor obtenido para el trabajo máximo por unidad de masa muscular en la expresión (5.4) se verifica experimentalmente para prácticamente todos los músculos esqueléticos de vertebrados. Pueden, no obstante, forzarse más y contraerse en una proporción mayor y, por lo

tanto, desarrollar más trabajo, hasta cerca de unos 200 J/kg como límite máximo.

Dado, por otra parte, que la fuerza máxima sólo se consigue a pequeñas velocidades de contracción, un músculo sólo puede desarrollar este trabajo en contracción muy lenta. Para el caso de contracción más rápida, por ejemplo la que realiza un músculo para saltar, la fuerza desarrollada es menor y la longitud de contracción debe mantenerse dentro del intervalo óptimo del 20 al 30 por ciento, por lo que el trabajo por unidad de masa muscular es del orden de los 60 J/kg calculados más arriba. Llamaremos, en lo que sigue, fuerza muscular específica y potencia muscular específica a la fuerza y potencia, respectivamente, por unidad de masa muscular.

Cuando un músculo se contrae para mover un hueso del esqueleto que, a su vez, desplaza un peso, la dirección del movimiento es la misma que la fuerza ejercida por el músculo y, por lo tanto, el trabajo es positivo. Pero un músculo no puede hacer fuerza en dirección contraria a la contracción, sino, en todo caso, resistirse a la extensión forzada por una fuerza externa o por la acción de un músculo antagonista; por ejemplo, el bíceps braquial se extiende al extender el brazo por la acción del tríceps al contraerse, según se vio en el capítulo 2, o por la acción de un peso, tal como puede verse en la figura 5.4. Así, cuando un músculo se alarga, la dirección del movimiento es contraria a la de la fuerza que puede hacer y su trabajo es negativo.

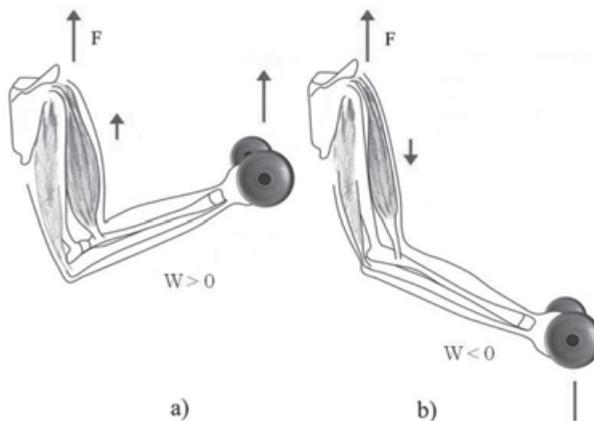


Fig. 5.4. a) Trabajo hecho por el bíceps braquial al contraerse. La dirección de la fuerza es paralela al movimiento del peso, por lo que el trabajo es positivo. b) Trabajo hecho por el bíceps braquial al hacer fuerza en sentido contrario al movimiento del peso. En este caso el trabajo es negativo.

Cuando un animal se mueve, o una persona pedalea, los músculos hacen trabajo positivo y negativo consecutivamente. Hacer trabajo positivo implica un cierto gasto de energía que puede medirse a través del consumo de oxígeno.

Hacer un trabajo negativo no es gratuito desde el punto de vista energético, ya que hay que mantener el tono muscular, pero es menos costoso que hacerlo positivo. **Se llama eficiencia metabólica al cociente entre la potencia mecánica desarrollada por un músculo y la potencia energética consumida. Para el caso de los mamíferos la eficiencia metabólica es del orden de 0,25**, con importantes variaciones según el ejercicio de que se trate y de las contribuciones relativas de trabajo positivo y negativo a lo largo del movimiento. Es decir, sólo un 25 por ciento de la energía consumida se transforma efectivamente en trabajo mecánico, mientras que el 75 por ciento restante se disipa en forma de calor en el organismo.

En cuanto a la velocidad con que se puede desarrollar el trabajo producido por la contracción de los músculos, es decir, la potencia muscular, ya en el capítulo 2 vimos que la fuerza es máxima a velocidad cero y tiende a cero a grandes velocidades de contracción que sólo son posibles sin carga. Por lo tanto, el producto de la fuerza por la velocidad se anulará cuando la fuerza es cero (a máxima velocidad) y cuando la velocidad es cero (a máxima fuerza) tal y como se representa en la figura 5.5.

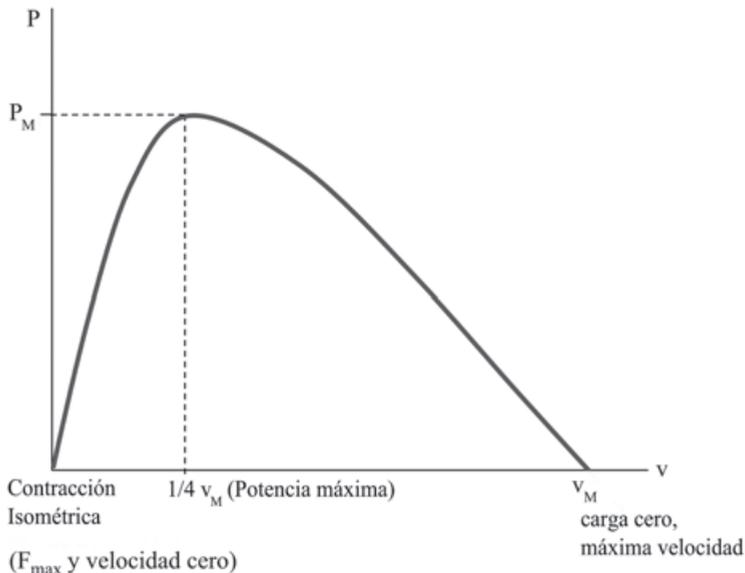


Fig. 5.5. Potencia muscular P en función de la velocidad de contracción. Cuando ésta es cero, la fuerza es máxima, pero no hay desplazamiento (ejercicio isométrico): el trabajo y la potencia son cero. Para la velocidad de contracción máxima la fuerza es cero y, de nuevo, el trabajo realizado se anula. La potencia máxima, P_M , se produce para una velocidad intermedia del orden de la cuarta parte de la velocidad máxima.

El máximo de la potencia muscular se alcanza, por lo tanto, a velocidades de contracción moderadas, entre el 15 y el 40 por ciento de la velocidad máxima.

Por ejemplo, la velocidad máxima de contracción del músculo rojo (fibras lentas) de la carpa es de unas 4,6 longitudes por segundo, pero durante la natación normal se contraen con una velocidad que es un 20 por ciento de la máxima (0,9 longitudes por segundo), justo cuando desarrollan la máxima potencia. **La potencia específica media de los músculos de los vertebrados se sitúa en los 60 W/kg** (véase en el Apéndice 1 de este capítulo una estimación teórica de este valor). Se han llegado a medir, sin embargo, en insectos y colibríes potencias musculares específicas cercanas a los 200 W/kg y nunca superiores.

5.1.2 Energía cinética

La segunda ley de Newton permite calcular el trabajo realizado por una fuerza a lo largo de la trayectoria que sigue un móvil impulsado por dicha fuerza. En efecto:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^B m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m \int_A^B \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \int_A^B d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$W = m \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{v} = \left. \frac{1}{2} m v^2 \right|_A^B$$

$$W = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \quad (5.5)$$

Aparece en esta última expresión una nueva magnitud cinemática, $\frac{1}{2} m v^2$, con las mismas dimensiones y unidades que el trabajo, que llamamos **energía cinética**, proporcional a la masa del móvil y al cuadrado de su velocidad. Por lo tanto, **el trabajo realizado por la fuerza entre dos puntos cualesquiera de la trayectoria es igual al incremento en energía cinética entre esos dos puntos**. El trabajo se “gasta”, por así decir, en incrementar la energía cinética del cuerpo que se mueve.

Cuando el módulo de la velocidad final, v_B , es mayor que el de la inicial, v_A , hay una ganancia neta de energía cinética y el trabajo realizado por la fuerza es positivo. Es el caso del ejemplo de un objeto que cae por una pendiente impulsado por la fuerza de la gravedad: el trabajo hecho por dicha fuerza es positivo, como hemos visto, y el objeto se mueve más deprisa al final de la caída que al principio, lo que denota que ha aumentado su energía cinética. Si, por el contrario, impulsamos con un cierta velocidad el cuerpo hacia arriba, su velocidad irá disminuyendo a medida que gana en altura y, por lo tanto, habrá una pérdida neta de energía cinética, lo que demuestra que la gravedad ha

estado haciendo un trabajo negativo (frenando el móvil en lugar de acelerarlo), como puede verse en la figura 5.6.

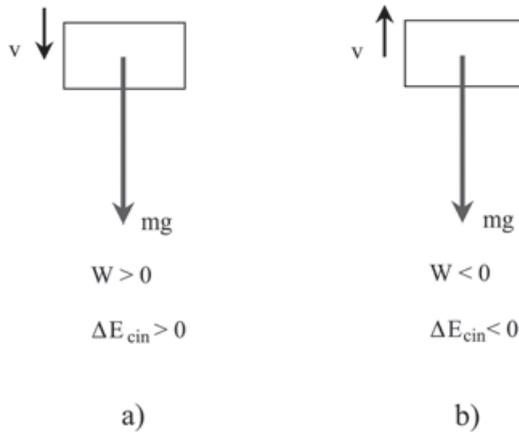


Fig. 5.6. a) Cuando un cuerpo cae por la acción de su propio peso, la fuerza de la gravedad hace un trabajo positivo y la energía cinética aumenta. b) Cuando un cuerpo se mueve en dirección contraria a la gravedad, ésta hace un trabajo negativo y la energía cinética disminuye.

5.1.3 Conservación de la energía

Energía potencial asociada a una fuerza constante

Para el caso en que la fuerza sea constante, podemos calcular el trabajo realizado entre dos puntos sin necesidad de conocer la trayectoria. En efecto:

$$W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \quad (5.6)$$

Tomando como eje vertical el eje Z, para el caso de la gravedad $\vec{F} = (0, 0, -mg)$, el trabajo según la expresión (5.6) resulta:

$$W = -mg(z_B - z_A) \quad (5.7)$$

y poniendo z_A igual a h y z_B igual a cero, obtenemos la expresión $W = mgh$, que ya habíamos obtenido para el deslizamiento sobre un plano inclinado desde una altura h . Igualando, ahora, la expresión general que nos da la relación del trabajo con la ganancia de energía cinética y la expresión (5.7), válida para el caso particular de la fuerza de la gravedad, resulta:

$$W = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -mg(z_B - z_A)$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A \quad (5.8)$$

La ecuación (5.8) muestra la existencia de una nueva cantidad conservada, puesto que su valor en un punto A de la trayectoria tiene que ser el mismo que en otro punto cualquiera B. Esta cantidad conservada se llama energía, o energía total, y es la suma de la energía cinética y otro término, que depende de la posición del móvil, que llamamos energía potencial, en este caso gravitatoria.

Tanto la energía cinética como la potencial como cualquier otra forma de energía se expresan en las mismas unidades que el trabajo, es decir, julios en el Sistema Internacional o cualquiera otra de las unidades de la tabla 5.1.

La conservación de la energía permite conocer las variaciones de la velocidad (energía cinética) en función de la posición (energía potencial) sin necesidad de calcular la trayectoria. Por ejemplo, para una montaña rusa, no importa lo complicada que sea su geometría y considerando despreciable el rozamiento, podemos saber en todo momento la velocidad de la vagoneta en función de la altura con sólo calcular su energía total en el instante inicial.

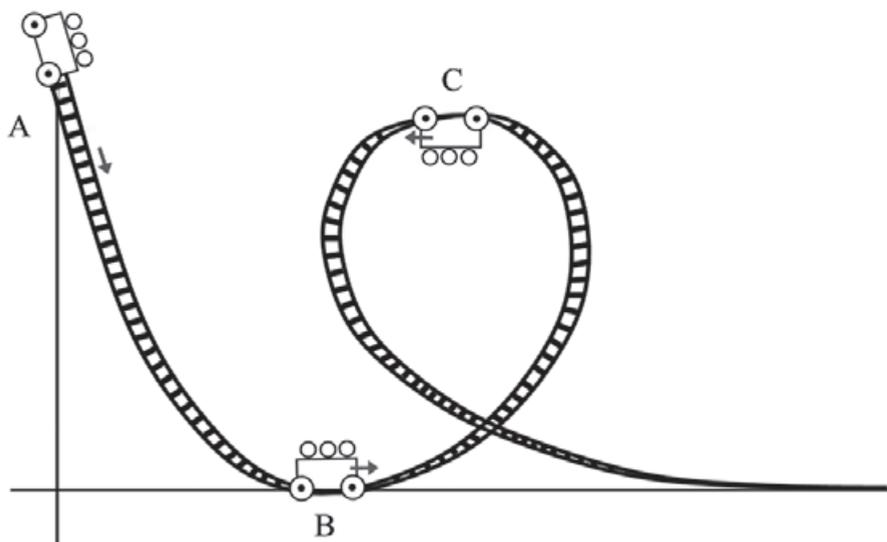


Fig. 5.7. Montaña rusa. En A, el carricoche (en reposo) sólo tiene energía potencial. En B ha transformado toda su energía potencial en cinética. En C ha vuelto a transformar la mayoría de su energía cinética en potencial, aunque le queda un remanente para seguir moviéndose.

Ejemplo. En una montaña rusa como la de la figura 5.7, un vagón de masa m parte del reposo en la posición A, a una altura de 30 m sobre el suelo. Tomaremos, por convenio, la energía potencial igual a cero a la altura del suelo. Por lo tanto, su energía total es:

$$E = 0 + m \times 9,8 \times 30 = 294 \times m$$

que resulta en julios si m está en kilogramos. Al llegar al punto más bajo B , la altura es cero y toda la energía potencial se ha transformado en cinética. La velocidad a la que se mueve en dicho punto vendrá dada por:

$$294 \times m = \frac{1}{2} m v_B^2 + 0$$

$$v_B \approx 24 \text{ m/s} \approx 86 \text{ km/h}$$

La velocidad a la que pasa por el máximo del segundo bucle, C , situado a 29 m del suelo será:

$$294 \times m = \frac{1}{2} m v_C^2 + m g \times 29$$

$$v_C \approx 4,4 \text{ m/s} \approx 16 \text{ km/h}$$

Definición general de energía potencial

Más en general, hay fuerzas para las que, como ocurría en el caso de la gravedad terrestre, el trabajo realizado entre dos puntos sólo depende de dichos puntos y no del camino recorrido, es decir:

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = -U(\vec{r}_B) + U(\vec{r}_A) \quad (5.9)$$

donde la función escalar $U(\vec{r})$, que tiene dimensiones de energía, se llama energía potencial y depende únicamente de la posición como variable cinemática. Cuando la fuerza es tal que el trabajo que realiza entre dos puntos depende sólo de la posición final y de la inicial, independientemente de la trayectoria seguida, según expresa la ecuación (5.9), se dice que la fuerza deriva de un potencial, o que es conservativa, y la condición necesaria y suficiente para que una fuerza sea de este tipo es que sus tres componentes cumplan con la condición:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

O, lo que es equivalente (ver la noción de gradiente en el Apéndice E):

$$\vec{F} = -\text{grad}U \quad (5.10)$$

Combinando ahora las expresiones (5.5) y (5.9), resulta que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 &= -U(\vec{r}_B) + U(\vec{r}_A) \\ \frac{1}{2}mv_B^2 + U(\vec{r}_B) &= \frac{1}{2}mv_A^2 + U(\vec{r}_A) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Existe, por lo tanto, una variable cinemática, que llamamos energía, suma de la energía cinética más la energía potencial, que se conserva cuando las fuerzas en presencia son conservativas. La energía cinética depende únicamente de la velocidad y está asociada al movimiento del cuerpo, mientras que la energía potencial depende de la posición y se asocia a la capacidad de producir trabajo o transformarse en energía de movimiento debido a las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en ese punto. En el caso de la gravitación terrestre, de las ecuaciones (5.7) y (5.9) es claro que:

$$U = mgz \quad (5.12)$$

por lo que cuanto mayor sea la altura a la que se encuentra un cuerpo en el campo gravitatorio terrestre, mayor es su energía potencial y la energía cinética en la que se puede convertir en caso de que disminuya su altura. La fuerza que deriva de esta energía potencial (5.12) será:

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} = 0 \\ F_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \\ F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} = -mg \end{aligned}$$

que es, precisamente, la fuerza gravitatoria.

Nótese que esta expresión de la fuerza gravitatoria, y de la energía potencial asociada, son correctas para el caso aproximado de una fuerza constante

independiente de la altura y siempre perpendicular al suelo, es decir, para el caso de considerar alturas y movimientos cuya dimensión sea muy inferior al radio de la Tierra. Para el caso de movimientos en el campo gravitatorio terrestre cuya dimensión sea comparable o superior a dicho radio, hay que utilizar la expresión general de la gravitación y deducir de ahí la energía potencial correspondiente. Nosotros nos limitaremos al caso aproximado en el que la expresión (5.12) es válida.

Ahora bien, las fuerzas elementales (gravitación y electromagnetismo) son conservativas, por lo que para un sistema aislado, no importa lo complejas que sean sus interacciones internas, la energía total se conserva. De la condición que tienen que cumplir las fuerzas conservativas se sigue que éstas sólo pueden depender de la posición, de forma que la fuerza de rozamiento de un cuerpo moviéndose en un fluido, que depende de la velocidad, no es conservativa. En este caso, el cuerpo pierde energía continuamente disipándola al entorno. Sin embargo, **si consideramos el sistema formado por el cuerpo y el fluido, entonces todas sus fuerzas internas, incluidas las que dan lugar a la fricción, son, en su origen, conservativas y la energía total se conserva. Lo que ocurre es que hay una transferencia de energía de una parte de ese sistema (el cuerpo que se mueve) a otra parte (el fluido).**

La magnitud física, medible, que actúa sobre un cuerpo, es la fuerza, mientras que la energía potencial es una variable cuyo significado reside únicamente en la fuerza que genera. Así, dos energías potenciales de las que se derive una única fuerza son equivalentes, en particular, dos energías potenciales que difieran en una constante aditiva son equivalentes. A partir de la expresión de la energía potencial se puede derivar unívocamente la fuerza que genera, pero a partir de una fuerza no se puede deducir unívocamente la energía potencial de la que deriva porque siempre se pueden añadir constantes aditivas arbitrarias.

En el caso de la expresión (5.12), hemos fijado la constante conviniendo implícitamente que la energía potencial es cero cuando la altura a la que se encuentra el cuerpo es cero. Para alturas positivas, la energía potencial es positiva, mientras que para alturas negativas es negativa. Pero podríamos haber escogido una forma equivalente:

$$U = mgz - mgz_0$$

donde z_0 es una altura fija. Esta expresión genera la misma fuerza que la anterior, pero difiere de ella en una constante aditiva. Ahora convenimos en fijar el origen de energías en z_0 ($U(z_0) = 0$). Para alturas superiores, la energía potencial es positiva y para alturas inferiores es negativa. Fijar la constante

arbitraria en la definición de la energía potencial es, por tanto, equivalente a fijar el punto en el que la energía potencial se toma igual a cero. Por supuesto, una vez elegido un origen de energías potenciales en un problema, es preciso mantenerlo durante todo su desarrollo.

Conversión de energía cinética en potencial en el salto

Ya dijimos en el primer capítulo que la altura que podía alcanzar una persona en salto vertical era del orden de 60 cm (entendido como la altura a la que llega su centro de gravedad a partir de su situación en el momento del despegue).

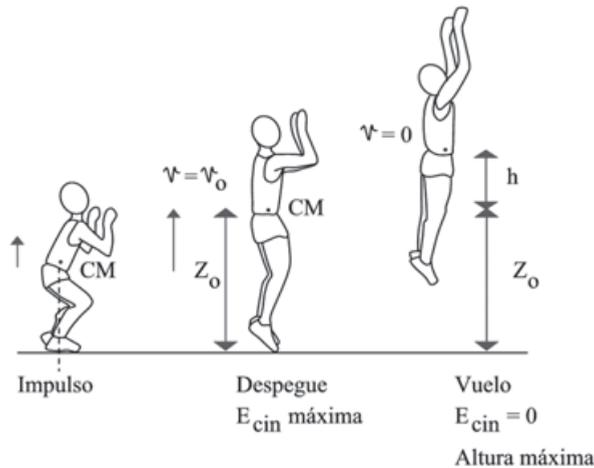


Fig. 5.8. Salto en vertical. La altura a la que se eleva en centro de masas como resultado de la velocidad de despegue es h .

Durante el impulso, la persona que salta imprime a su cuerpo una velocidad hacia arriba, de forma que posee, en el momento del despegue, una cierta energía cinética que se irá transformando en energía potencial según asciende hasta ser únicamente energía potencial en el punto de altura máxima. Si la masa de la persona es de 70 kg y alcanza una altura de 50 cm , la energía total será:

$$E = mgz = 70 \times 9,8 \times 0,5 = 343\text{ J}$$

que es también la energía cinética de salida y, por lo tanto, el trabajo que han debido hacer los músculos de las piernas es de 343 J . Teniendo en cuenta que para desarrollar un cierto trabajo muscular hay que gastar una cantidad de energía metabólica cuatro veces superior, la energía consumida en este salto vertical es de $343 \times 4 = 1.372\text{ J} \simeq 0,33\text{ kcal}$. Para alcanzar la altura de 50 cm , la velocidad de despegue tiene que ser:

$$v = \sqrt{2 \times 9,8 \times 0,5} = 3,1 \text{ m/s}$$

y el tiempo de impulso es aproximadamente de medio segundo. Por lo tanto, la potencia media desarrollada durante el impulso hacia arriba ha sido:

$$P = \frac{343 \text{ J}}{0,5 \text{ s}} \approx 686 \text{ W}$$

que es una potencia equivalente a 0,9 caballos de vapor. En el salto intervienen las dos piernas, con un peso total de unos 24 kg, de los que aproximadamente un 40 por ciento corresponden a tejido muscular, lo que da una potencia específica durante el salto de unos 71 W/kg, que está en los márgenes calculados anteriormente, teniendo en cuenta que se ha tomado una longitud de extensión de 50 cm (ver la tabla 1.2 del capítulo 1), lo que implica que la contracción de los músculos saltadores ha sido superior al 20 por ciento considerado al deducir el valor de la potencia específica.

Un buen saltador de altura puede elevar su centro de gravedad con una sola pierna por encima de los 80-90 cm, debido a que sus músculos tienen una preparación especial y a que durante la carrera de ataque a la barra es capaz de transformar parte de la energía cinética asociada al movimiento horizontal en energía cinética de despegue a través de los tendones y otros ligamentos elásticos capaces de acumular energía y liberarla cuando se expanden, añadiéndose a la que se genera en el impulso vertical del salto. Aun así, el centro de masas llega a una altura del orden de 2,00-2,20 m suponiendo que, en el momento de despegar, estaba a 1,20-1,30 m del suelo. Y, sin embargo, la técnica de salto permite saltar alturas superiores pasando las distintas partes del cuerpo por encima del listón aun cuando el centro de gravedad esté permanentemente situado por debajo.

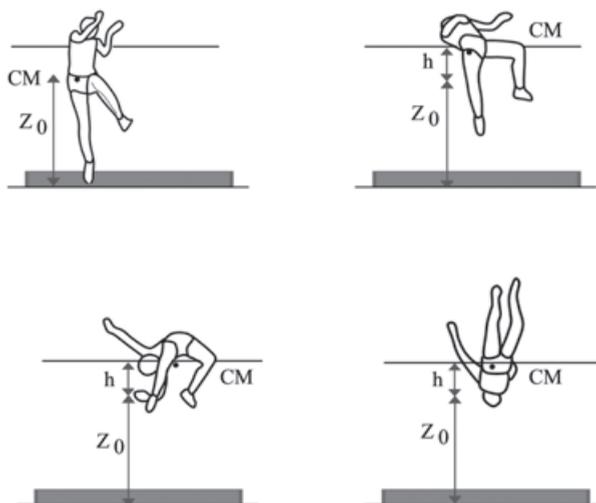


Fig. 5.9. El salto de altura y el movimiento del centro de masas; z_0 es la altura inicial del centro de masas y h la altura a la que éste se eleva como consecuencia del salto.

Cuando la cabeza y los hombros pasan, las piernas y la parte baja del tronco están a una altura inferior, con el centro de masas por debajo de la barra. En el momento en el que pasa la espalda, los brazos y las piernas se dirigen hacia abajo y así el centro de masas está en un punto exterior al cuerpo, también por debajo de la barra. Finalmente, las piernas y la parte inferior del tronco pasan cuando ya la cabeza y los hombros están cayendo.

Otro ejemplo interesante es el de los giros alrededor de la barra fija, en los que hay también conversión de energía cinética en potencial y viceversa, y aportes de energía muscular. En efecto, si el gimnasta está en posición vertical completamente estirado apoyándose en las manos sobre la barra, tal como representa la primera fase de la figura 5.10, su energía potencial es igual a mgz , siendo m su masa y z , la altura a la que se encuentra el centro de masas sobre el suelo. Cuando el gimnasta gira por efecto de la gravedad y pasa a estar colgado de la barra en posición vertical, ha perdido una energía igual a $mg\Delta z$, donde Δz es la diferencia de alturas entre las dos posiciones del centro de masas, y ganado una energía cinética equivalente. Si completara una vuelta y no hubiera rozamiento, entonces volvería a la posición inicial de energía potencial máxima y energía cinética cero, pero como hay pérdidas por rozamiento, no se puede elevar hasta la altura de partida. Pongamos que el rozamiento hace que el centro de gravedad, una vez completada la vuelta, quede 5 cm por debajo de la altura inicial.

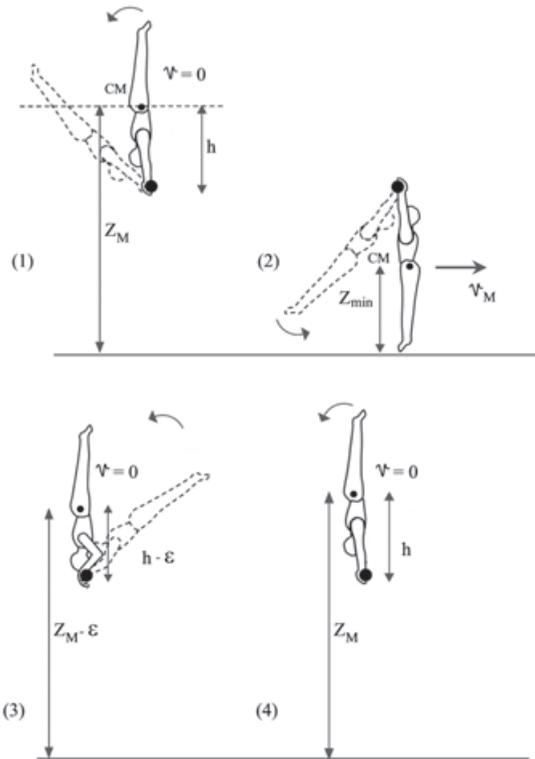


Fig. 5.10. Giro alrededor de una barra. La pérdida de energía por rozamiento se compensa con el impulso muscular para recuperar la posición vertical tras cada vuelta.

Si el gimnasta mantuviera la posición rígida, no completaría la vuelta. Lo que hace, sin embargo, es plegar los brazos ligeramente según va ascendiendo, de forma que, aun cuando el centro de masas esté 5 cm por debajo de la altura inicial después de haber descrito una espiral, se encuentre en la vertical aunque la distancia del centro de masas a la barra es ahora 5 cm menor que antes. En ese momento los músculos de los brazos empujan la barra, estirándose y haciendo un trabajo igual a la energía perdida hasta que el cuerpo está de nuevo completamente estirado en la posición de partida para iniciar un nuevo ciclo.

5.1.4 Curvas de energía potencial en una dimensión

Propiedades de las trayectorias

Existen energías potenciales que dependen de una sola coordenada y, por lo tanto, las fuerzas que de ellas se derivan sólo tienen una componente distinta de cero. Si la velocidad inicial es cero o está contenida en el eje asociado a esa variable, entonces el movimiento es unidimensional. Empezaremos

estudiando el caso del movimiento a lo largo del eje Z para un cuerpo que se mueve por efecto de la fuerza gravitatoria terrestre que, como sabemos, deriva de una energía potencial $U = mgz$.

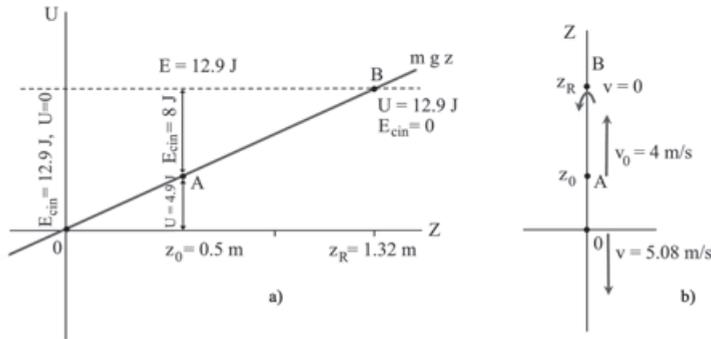


Fig. 5.11. Energía gravitatoria asociada a la gravedad terrestre y descripción cualitativa del movimiento de un cuerpo con energía total igual a 12,9 J y posición inicial A. En la figura de la izquierda se puede apreciar la energía cinética y potencial del cuerpo en función de la posición en los puntos A, B y O, mientras que en la de la derecha se representa su trayectoria real a lo largo del eje Z .

La energía total de una partícula moviéndose a lo largo del eje Z en dicho potencial será:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mgz$$

El valor de la energía viene determinado por las condiciones iniciales (posición y velocidad) y permanece constante en el tiempo. En la figura 5.11 puede verse que, en cualquier punto de la trayectoria, la energía consta de dos partes, la energía potencial en ese punto y la energía cinética. Pero esta última es siempre mayor o igual que cero, de forma que debe cumplirse en todo momento:

$$E \geq mgz$$

Por lo tanto, **los puntos del eje Z en los que la energía total sea menor que la energía potencial son inalcanzables** para la partícula, es decir, son puntos que están por encima de la altura máxima alcanzable dadas las condiciones iniciales del movimiento. El punto Z_R , en el que se cumple la igualdad $E = mgz_R$, es un punto de retorno debido a que la energía cinética es igual a cero. Corresponde a la altura máxima que alcanza el cuerpo cuando se desplaza a lo largo del eje Z justo en el instante en el que la velocidad se hace cero y vuelve a caer.

Supongamos que lanzamos un cuerpo de 1 kg hacia arriba desde la altura de 0,5 m con una velocidad inicial de 4 m/s. Las energías cinética y potencial en el momento inicial, en el que el cuerpo está en la posición A, son:

$$E_{cin}(t=0) = \frac{1}{2}mv^2 = 8 J$$

$$U(t=0) = mgz = 4,9 J$$

y, por lo tanto, la energía total es 12,9 J, que habrá de conservarse durante todo el movimiento. El cuerpo se desplaza hacia arriba en la figura 5.11.b (hacia la derecha en el figura 5.11.a) y va ganando energía potencial al tiempo que pierde energía cinética. El punto de retorno, B, que es el de máxima altura, se alcanzará cuando toda la energía se haya convertido en potencial y la energía cinética sea cero, es decir:

$$z_R = \frac{E}{mg} = \frac{12,9}{9,8} = 1,32 m$$

A partir de ese punto, el móvil se mueve con velocidad negativa ganando energía cinética y perdiendo energía potencial según pierde altura. Cuando llega otra vez al punto A, pero moviéndose hacia abajo, la energía potencial es igual a la inicial y, en consecuencia, la energía cinética es también igual a la inicial, es decir, se mueve a 4 m/s pero hacia abajo. A partir de ahí sigue bajando, ganando más energía cinética y perdiendo energía potencial. Así, cuando llega al punto C, a la altura $z = 0$, la energía potencial es cero y, en consecuencia, la energía cinética tiene que ser 12,9 J, lo que corresponde a una velocidad:

$$v = \sqrt{\frac{2E}{m}} = 5,08 m/s$$

A lo largo de la trayectoria la energía potencial se transforma en cinética y viceversa, con la condición de que su suma sea siempre la misma. Una central hidroeléctrica transforma la energía potencial del agua situada en la parte alta del embalse, a una cierta altura, en energía cinética de esa misma agua cuando cae hasta la base de la presa, y esta energía cinética se transforma después en nuevas formas de energía cinética o potencial, por ejemplo en corriente eléctrica.

Las mismas nociones son válidas para una forma cualquiera de energía potencial. Consideremos, por ejemplo, la de la figura 5.12.

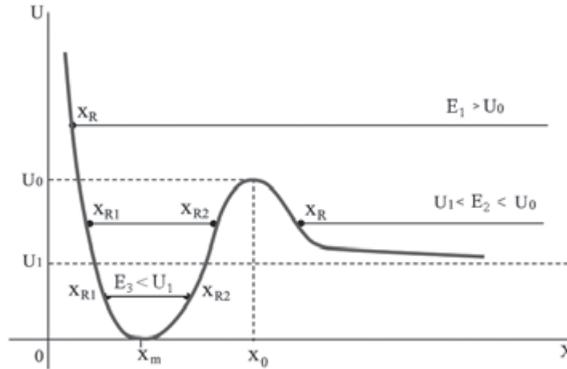


Fig. 5.12. Curva de energía potencial. La fuerza que deriva de esta energía potencial es repulsiva de 0 a x_m , atractiva entre x_m y x_0 y repulsiva, de nuevo, para $x > x_0$. Están dibujados los puntos de retorno para diversos valores de la energía y estados iniciales. U_1 es la energía potencial para $x \rightarrow \infty$.

Supongamos que la partícula está infinitamente alejada del origen y viene desde la derecha, lo que implica que su energía total, E_1 , tiene que ser superior a U_1 . La energía cinética en el infinito era $E_1 - U_1$ y, a medida que avance hacia la izquierda, irá ganando energía potencial y perdiendo energía cinética hasta llegar a la posición x_0 , en que, suponiendo que $E_1 > U_0$ (lo que corresponde a la línea horizontal más alta en la figura) pasará con una energía cinética $E_1 - U_0$. A partir de ese momento, volverá a ganar velocidad según pierda energía potencial, llegará al mínimo en el que toda la energía es cinética y lo sobrepasará ganando energía potencial hasta llegar a un punto, x_R , en el que la energía cinética es cero, lo que significa que se ha anulado el módulo de la velocidad (hasta ese momento negativa) y cambia su sentido para moverse hacia la derecha con velocidad positiva. El punto x_R es el punto de retorno y se calcula sabiendo que en él toda la energía es potencial:

$$E_1 = U(x_R)$$

La partícula, finalmente, acabará moviéndose indefinidamente hacia la derecha recuperando los valores de energía cinética y potencial del inicio.

Supongamos ahora que la partícula tiene una energía total, E_2 , tal que:

$$U_0 > E_2 > U_1$$

En este caso, el movimiento dependerá de la posición inicial. Si en un cierto instante, la partícula se encuentra a la derecha de x_0 , el movimiento será de nuevo infinito con un sólo punto de retorno x_R en el que “rebota” al agotar toda su energía cinética y transformarla en potencial. Si, por el contrario, se ubica a la izquierda de x_0 , entonces la partícula sólo puede moverse entre dos puntos de retorno x_{R1} y x_{R2} . El movimiento es finito y transcurre cambiando

continuamente energía potencial, que es máxima en los puntos de retorno por energía cinética, que es máxima en el mínimo de la energía potencial. Los puntos de retorno se obtendrán también a partir de la ecuación:

$$E_2 = U(x_R)$$

que para este valor de la energía tendrá tres soluciones.

Por último, si la energía E_3 es menor que U_1 , la partícula sólo puede existir en la zona del mínimo moviéndose entre los dos puntos de retorno solución de la ecuación:

$$E_3 = U(x_R)$$

que tendrá, para este rango de valores de la energía, dos soluciones. Nótese que es imposible la existencia, en este potencial, de una partícula con energía total menor que cero, ya que eso implicaría una energía cinética negativa.

La fuerza y la energía potencial

Para el caso de una dimensión, sabemos que:

$$F = -\frac{dU(x)}{dx}$$

que es la primera componente de la ecuación general:

$$\vec{F} = -\text{grad}U(\vec{r})$$

para el caso en que U sólo dependa de la variable x . Por lo tanto, la fuerza es positiva para pendientes negativas de la energía potencial y negativa para pendientes positivas. En la figura 5.13 se ha indicado la dirección de la fuerza en los distintos tramos de la coordenada x . La fuerza, por lo tanto, va siempre hacia los mínimos de la energía potencial y en sentido contrario a los máximos. En esos puntos, máximos y mínimos, la pendiente es cero y, en consecuencia, la fuerza es también cero o, lo que es lo mismo, son puntos de equilibrio.

Pero el equilibrio en los mínimos de la energía potencial es estable porque si una perturbación externa separa ligeramente al sistema de la posición de equilibrio, las fuerzas que se derivan de la energía potencial van en dirección al mínimo y tienden a recuperar la posición de equilibrio, mientras que en los máximos, cualquier desviación aleja al sistema de esa posición y, por lo tanto, están en equilibrio inestable. Así, **todo mínimo en la energía potencial representa una posición de equilibrio estable, mientras que todo máximo**

representa una posición de equilibrio inestable. Por otra parte, en las zonas en las que la energía potencial crece con x , la fuerza es negativa, mientras que es positiva en las zonas en las que decrece con x , lo que hace que la fuerza tienda a llevar a los cuerpos hacia los mínimos de la energía potencial.

Enlace molecular

Los átomos en una molécula, y las moléculas entre sí, interactúan debido a que están constituidos por electrones y núcleos cargados eléctricamente. Las fuerzas resultantes son atractivas o repulsivas dependiendo de la distancia y derivan de una energía potencial cuya forma es similar a la de la figura 5.13.

Cuando los átomos están tan cerca que sus cortezas electrónicas empiezan a “tocarse”, la interacción es fuertemente repulsiva, lo que implica que para distancias próximas a cero la energía potencial tiene que tener una pendiente fuertemente negativa. Cuando la distancia entre los átomos tiende a infinito, la fuerza tiende a cero y la energía potencial tiene que tender a una constante, que se suele tomar igual a cero por convenio, aunque ya sabemos que su valor es indiferente y lo único importante son los gradientes, asociados a las fuerzas. **A distancias algo superiores a la de “contacto”, la interacción es siempre atractiva** debido al juego de fuerzas entre las partículas cargadas de ambos átomos y a las deformaciones que inducen dichas fuerzas, lo que se traduce en que la forma de la energía potencial es la que se representa en la figura 5.13.

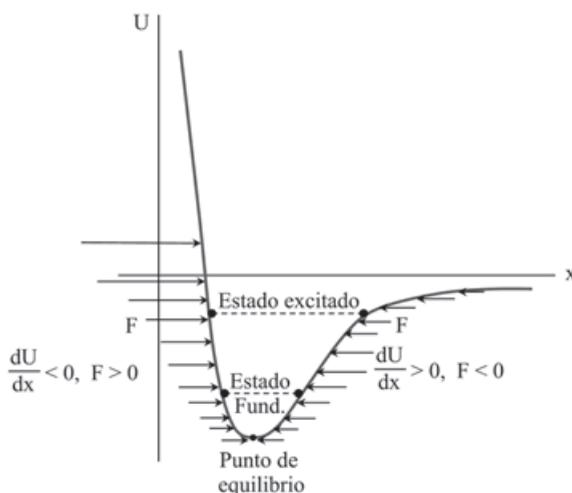


Fig. 5.13. Energía potencial típica de la interacción entre dos átomos. Cuando la energía es negativa nos encontramos ante un estado ligado de los dos átomos, es decir, una molécula. Las flechas indican la dirección e intensidad de la fuerza.

En el contexto de la Física Clásica, los átomos pueden estar en cualquier estado de energía. En particular, si se encontraran en reposo a la distancia que corresponde al mínimo de la energía potencial, la energía cinética sería cero, y estarían en equilibrio estable, ligados formando una molécula. Pero esta situación no es posible en el mundo subatómico, regido por las leyes de la Mecánica Cuántica, como veremos en el capítulo 23. Así que el estado más estable, llamado también estado fundamental, tiene una energía negativa pero siempre superior al mínimo de la energía potencial. La posición de los átomos varía, entonces, oscilando entre los dos puntos de retorno, aunque siguen estando ligados en una molécula: los átomos vibran alrededor de la posición de equilibrio.

La energía total puede aumentar debido a aportes externos de energía, por ejemplo a choques con otras moléculas, en cuyo caso los átomos oscilan con una amplitud mayor en estados llamados excitados. Sólo si la energía que se transmite a la molécula es tan grande que se hace mayor que cero, los átomos ya no permanecen ligados y se separan indefinidamente. La energía que hay que dar a cada molécula para que se rompa se llama energía de disociación y su determinación nos indica la profundidad del mínimo de la energía potencial. Está claro que cuanto más profundo sea éste, más estable será la molécula y más difícil disociarla. Para una molécula de cloruro sódico (NaCl), la distancia de equilibrio entre los centros de los iones de sodio y cloro es de aproximadamente $0,236 \text{ nm} = 2,36 \times 10^{-10} \text{ m} = 2,36 \text{ \AA}$ y la profundidad del “pozo” de energía potencial es de unos $9,2 \times 10^{-19} \text{ J} = 5,7 \text{ eV}$.

5.2 La energía y los seres vivos

5.2.1 La tasa metabólica

La ley de conservación de la energía es un principio determinante en el comportamiento de cualquier sistema físico. La energía no es un concepto sencillo, como la masa de un cuerpo, la carga eléctrica o el número de partículas. Es algo mucho más abstracto, suma de dos variables llamadas energía cinética y energía potencial, cuya única particularidad reseñable es que se conserva a lo largo de la evolución de un sistema aislado. Las posiciones y velocidades de las partículas que lo componen variarán de acuerdo con las fuerzas en presencia, pero la combinación de posiciones y velocidades que define la energía tendrá un valor constante.

Ya hemos visto la transformación de energía cinética en energía potencial mecánica, pero como veremos más adelante, el calor es una forma de energía

cinética y la energía química es una forma de energía potencial electromagnética asociada a las posiciones de los átomos en las moléculas y de los electrones en los átomos. **Los seres vivos están continuamente procesando energía e intercambiándola con el medio. Con los alimentos incorporan a su organismo la energía potencial contenida en las moléculas de los nutrientes, transformándola en energía cinética de locomoción y de movimiento de sus órganos internos, en calor y en la energía potencial contenida en las moléculas que sintetiza.**

Así, para vivir, los seres vivos necesitan consumir energía de forma sostenida a un ritmo que depende de varios factores, esencialmente el tamaño del organismo y el tipo de actividad que necesite desarrollar. El modo más completo y más frecuente de estimar la energía consumida en los animales es a través del oxígeno gastado en la respiración. En efecto, todas las reacciones de las que se obtiene energía provienen de la oxidación (“combustión”) de determinados compuestos orgánicos, fundamentalmente de hidratos de carbono y grasas. Cada reacción de oxidación desprende una cantidad de energía distinta, pero ocurre que **la cantidad de energía producida por unidad de volumen de oxígeno es prácticamente constante, del orden de 20.000 J por litro de oxígeno consumido.** El metabolismo de la glucosa produce una cantidad ligeramente mayor y el de las grasas ligeramente menor, pero la cifra consignada es un promedio bastante preciso.

Llamamos tasa metabólica a la energía por unidad de tiempo consumida por un ser vivo y tiene, por lo tanto, dimensiones de potencia. La tasa metabólica basal, P_B , es la mínima cantidad de energía por unidad de tiempo necesaria para mantener la actividad vital. La noción de tasa metabólica basal es confusa desde el punto de vista experimental, ya que implica que, por debajo de ese valor, es imposible que un organismo se mantenga vivo. La dificultad para definir un umbral de este tipo y la dependencia de los factores externos en la tasa metabólica mínima aconsejan utilizar la tasa metabólica en reposo, medible en condiciones ambientales que se definirán con detalle en el capítulo 7, en lugar de la tasa metabólica basal. Sin embargo, el término basal es utilizado de forma generalizada, por lo que, en este texto, ambas expresiones (basal y en reposo) se utilizarán de forma equivalente. **La tasa metabólica basal de una persona de unos 70 kg de peso es de unos 80 W**, de los que 40 W se destinan al funcionamiento del cerebro, 15 W al corazón y el resto a los otros órganos internos. Esto quiere decir que en un día, el gasto energético mínimo será:

$$P_B = 80 \text{ W} \times (24 \times 3.600) \text{ segundos/día} = 6,9 \times 10^6 \text{ J/día} = 1,65 \times 10^6 \text{ cal/día} = 1.650 \text{ kcal/día.}$$

donde se ha expresado la energía en calorías y kilocalorías con la equivalencia de $1 \text{ cal} = 4,18 \text{ J}$ ya especificada en la tabla 5.1. Así pues, una persona necesita para mantenerse en vida consumir un mínimo de 1.650 kilocalorías por día. Mantener el tono postural en posición erguida ya requiere un gasto energético suplementario, y para desarrollar una actividad vital con esfuerzos físicos ligeros, es necesario asegurar un gasto energético medio, o tasa metabólica media, P_m , de unas 2.500 kcal/día , es decir:

$$P_m = \frac{2,5 \times 10^6 \times 4,18 \text{ J}}{24 \times 3.600 \text{ s}} \approx 120 \text{ W}$$

que es un promedio entre la tasa metabólica en reposo y la tasa metabólica asociada a los esfuerzos moderados. El gasto medio de energía es, por lo tanto, algo superior al de una bombilla (de 100 W). Más adelante veremos cómo varía la tasa metabólica con el tamaño de un animal. Podemos ahora estimar la cantidad de oxígeno que necesitamos consumir para generar esa energía a lo largo de un día:

$$\frac{120 \text{ W} \times (24 \times 3.600) \text{ s} / \text{día}}{20.000 \text{ J} / \text{O}_2} \simeq 500 \text{ lO}_2 / \text{día} \approx 0,36 \text{ lO}_2 / \text{min}$$

Consumimos, por lo tanto, unos 500 litros de oxígeno al día, lo que implica que, como hay un 20 por ciento de oxígeno en el aire, usamos diariamente $2,5 \text{ m}^3$ de aire “fresco” en nuestra actividad normal.

La tasa metabólica varía mucho en función de la actividad que se esté desarrollando, desde los 80 W mínimos hasta puntas de actividad física muy violenta en que puede sobrepasar los 1.500 W .

Tabla 5.2. Tasa metabólica (para una persona de unos 70 kg) asociada a algunas actividades			
Actividad	Tasa met. (W)	Tasa met. (kcal/min)	Consumo de O₂ (l/min)
Sueño	80	1,2	0,24
Paseo lento	250	3,6	0,75
Pedalear o nadar despacio	500	7,2	1,5
Jugar al fútbol	620	8,9	1,9
Nadar rápido	750	11	2,2
Pedalear a 40 km/h	1.800	26	5,4

5.2.2 Energética de la locomoción

Locomoción por inercia

La energía mecánica que un animal puede generar es sólo una fracción de la energía total consumida. Como ya hemos visto, **los músculos transforman energía química en movimiento, pero con un rendimiento bastante reducido, del orden del 25 por ciento**. Es decir, de cada julio gastado en el tejido muscular, sólo un cuarto se convierte en trabajo mecánico; el resto acaba por eliminarse en forma de calor. Pero, además, hay que dedicar parte de la energía disponible a otras funciones, por lo que ese porcentaje es el máximo alcanzable, siendo normalmente mucho menor la parte de la energía total consumida que se convierte en movimiento. **La potencia mecánica desarrollada es siempre menor que la potencia metabólica consumida**, siempre por debajo del 25 %. Por ejemplo, cuando se pedalea a velocidad moderada el trabajo mecánico desarrollado es del orden de 100 W , de forma que la tasa metabólica es de unos 500 W ($4 \times 100\text{ W} + 100\text{ W}$, estos últimos asociados a la tasa metabólica en reposo) y se puede mantener el esfuerzo durante horas. Cuanto más intenso sea el ejercicio, más grande puede ser el rendimiento mecánico, pero durante menos tiempo se puede resistir. Desarrollar una potencia mecánica de 400 W , es decir, una tasa metabólica superior a 1.700 W , sólo es posible durante algunas decenas de minutos y sólo está al alcance de algunas personas especialmente dotadas y entrenadas. El máximo de potencia mecánica que una persona puede producir es unos 1.500 W en *sprint*, aproximadamente dos caballos de vapor, lo que requiere un gigantesco consumo metabólico de unos 6.000 W (nada menos que $1,4\text{ kcal}$ por segundo), pero no puede mantenerse más allá de unos pocos segundos.

Veamos ahora lo que se conoce como el modelo de locomoción por inercia introducido por A. V. Hill. Cuando un animal se desplaza a velocidad uniforme sobre una superficie horizontal, si no hubiera rozamiento no debería realizar ningún trabajo para moverse, ya que la energía cinética es constante. Es lo que ocurriría con un móvil deslizando sin ninguna fricción. Sin embargo, los animales necesitan mover las patas para desplazarse y este movimiento exige gastar energía.

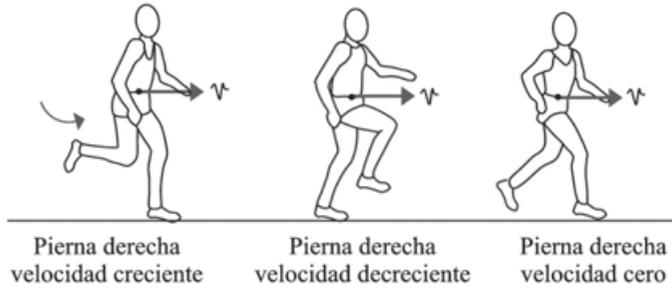


Fig. 5.14. Modelo de locomoción por inercia.

Si el cuerpo se mueve a velocidad constante respecto del suelo, cada pie está en reposo mientras mantiene el contacto con el suelo. Para seguir desplazándose a la misma velocidad, en cada zancada el animal necesita levantar el pie, acelerar la extremidad correspondiente hasta alcanzar la velocidad de marcha, rebasar la posición del cuerpo y luego frenarla hasta llegar de nuevo al reposo en el siguiente contacto con el suelo. Así, un grupo de músculos ha de acelerar la extremidad desde el reposo hasta una energía cinética del orden de $\frac{1}{2}m_e v^2$, donde m_e es la masa de la extremidad y v la velocidad de desplazamiento, mientras que otro grupo tiene que decelerarla desde ese mismo valor de la energía cinética hasta cero. En cada zancada, por lo tanto, los músculos desarrollan un trabajo mecánico igual a dos veces la energía cinética máxima de cada extremidad. Si l_c es la distancia de contracción y F_m es la fuerza muscular, tendremos:

$$F_m \times l_c = 2 \frac{1}{2} m_e v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{F_m \times l_c}{m_e}} \quad (5.13)$$

En esta expresión se ve que el numerador de la fracción bajo el signo de la raíz cuadrada es proporcional a la fuerza muscular puesta en juego por las extremidades locomotoras, que es, a su vez, proporcional a la sección de los músculos, tal y como vimos en el capítulo 2, y a la distancia de contracción, que es una fracción de la longitud de la extremidad. Teniendo en cuenta ambos factores, resulta que dicho numerador es proporcional al volumen de los músculos implicados en el movimiento. El denominador, por su parte, es simplemente la masa de la extremidad, proporcional también a su volumen. Así, **si dos animales tuvieran distinto tamaño pero las mismas proporciones geométricas y la misma fracción de masa muscular en las extremidades, se moverían con la misma velocidad.** Esta conclusión es chocante, pero se

verifica aproximadamente en animales de similar forma corporal y distinto tamaño, como gacelas o canguros. Ya veremos en el siguiente capítulo las correcciones que es preciso hacer para describir de una forma más precisa la relación entre velocidad de desplazamiento y masa corporal.

En consecuencia, en una primera aproximación, el tamaño, a igualdad de forma, no importa, pero proporciones distintas sí que permiten velocidades de crucero distintas. De la expresión (5.13) se sigue que para alcanzar grandes velocidades conviene que las extremidades sean lo más largas (l_c grande) y lo más ligeras posible (m_e pequeña), y todos los animales veloces tienen, en efecto, patas largas y finas. Claro que patas largas y finas implican poca sección muscular y, por lo tanto, poca fuerza F_m . Así, **la configuración óptima sería extremidades muy largas y ligeras, con los músculos que las mueven ubicados en el tronco o en una zona poco móvil a fin de no gastar energía en su balanceo.** Y eso es precisamente lo que ocurre con animales especialmente adaptados a la carrera, como los caballos, ciervos, galgos o avestruces, cuyas patas, largas y finas, son movidas por potentes grupos musculares situados tan cerca del tronco como es posible mecánicamente, a fin de minimizar su oscilación.

Se ha comparado con frecuencia la eficiencia energética de la locomoción bípeda y la cuadrúpeda. El movimiento sobre dos extremidades es menos fluido que sobre cuatro, gastándose, por consiguiente, más energía en las sucesivas aceleraciones y deceleraciones del cuerpo en cada paso, mientras que sobre cuatro extremidades habría menos consumo de energía al ser el movimiento más uniforme. Se ha especulado con el hecho de que la posición erguida de los humanos es poco eficaz desde el punto de vista de la locomoción, pero está compensada con creces por las ventajas adquiridas al liberar las manos para transportar bebés y comida, o manipular herramientas. Por otra parte, la locomoción bípeda requiere extremidades más largas, con pasos más amplios y menor frecuencia de paso, lo que implica una mayor fracción de fibras lentas, que son menos costosas energéticamente, pero, al tiempo, la masa muscular relativa de las extremidades locomotoras en relación con el cuerpo es más grande que en los cuadrúpedos para poder sostener la misma masa corporal.

Los datos experimentales muestran que, en conjunto, el coste energético de ambas formas de moverse es prácticamente equivalente. Así, primates como el chimpancé consumen la misma cantidad de oxígeno cuando se mueven a la misma velocidad sobre dos o sobre cuatro extremidades. Y lo mismo ocurre cuando se compara el gasto metabólico por unidad de longitud recorrida de perros y pavos del mismo tamaño.

El modelo inercial es interesante porque permite obtener conclusiones cualitativas válidas, pero tiene muchas limitaciones debido a que no tiene en cuenta muchos otros factores, por ejemplo el movimiento de balanceo, tanto lateral como vertical, del centro de masas del animal mientras corre, lo que implica que el gasto real de energía sea mayor. En el capítulo siguiente se hará una evaluación más precisa del coste energético asociado a la locomoción.

Manteniéndonos todavía dentro del modelo inercial, el trabajo realizado por los músculos de una pierna cuando una persona se mueve es igual a $m_e v^2$ en cada zancada. Si τ es el tiempo que se tarda en dar una zancada, la potencia P_D que es preciso desarrollar para desplazarse a una velocidad v es:

$$P_D = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{m_e v^2}{\tau}$$

y si L_z es la longitud de cada zancada, se cumple que $L_z = v\tau$, de donde:

$$P_D = \frac{m_e v^3}{L_z}$$

Tomemos, por ejemplo, el caso de un paseante que camina a una velocidad de 1 m/s ($3,6 \text{ km/h}$) con una longitud de zancada típica de $0,9 \text{ m}$. Si pesa unos 70 kg , entonces la masa de cada pierna es del orden de 11 kg y la potencia mecánica desarrollada será:

$$P_D = \frac{11 \times 1}{0,9} = 12,2 \text{ W}$$

lo que implica que los músculos de las piernas consumen cuatro veces más, unos 50 W para poder afrontar el esfuerzo que se les exige, aunque, como ya hemos dicho, la energía consumida en el movimiento es superior debido a los factores no tenidos en cuenta en el modelo. A la energía gastada en los músculos locomotores hay que añadir la necesaria para mantener todas las funciones vitales durante la locomoción, más la asociada al aumento de la temperatura corporal y de los ritmos cardíaco y respiratorio, hasta completar un total de más de 250 W , de acuerdo con la tabla 5.2.

Cuando se corre a una velocidad de 3 m/s (unos 11 km/h), bastante elevada para una persona sin entrenamiento, la longitud de zancada asciende hasta $1,8 \text{ m}$ aproximadamente y la potencia mecánica es:

$$P_D = \frac{11 \times 27}{1,8} = 165 \text{ W}$$

A esta velocidad, la potencia consumida por los músculos locomotores es ya de unos $4 \times 165 = 660 \text{ W}$ y la mayor parte de la tasa metabólica se dedica a generar movimiento. Esta potencia mecánica de unos 160 W es la máxima que se puede desarrollar durante periodos prolongados, del orden de horas. A mayores velocidades, la potencia mecánica crece mucho (con el cubo de la velocidad) y sólo puede mantenerse durante periodos de tiempo muy cortos.

La potencia muscular específica máxima desarrollada por la mayoría de los vertebrados es de unos 60 W/kg para las fibras lentas (consúltese el Apéndice 1 de este capítulo para ver una deducción de esta cifra a partir de la fórmula de Hill). En cada pierna, aproximadamente el 40 por ciento de la masa es músculo, por lo que el límite de la potencia mecánica de una persona, sin ningún otro mecanismo adicional, sería de:

$$60 \times 11 \times \frac{40}{100} \simeq 260 \text{ W}$$

que es el máximo que una persona sin entrenamiento específico puede desarrollar durante un tiempo del orden de media hora. Esa potencia equivale, con una longitud de zancada de $2,1 \text{ m}$, a moverse a unos $3,7 \text{ m/s}$ ($13,5 \text{ km/h}$). En realidad es posible alcanzar velocidades superiores gracias a otros factores: a) una fracción más grande de fibras rápidas, que son capaces de alcanzar potencias más altas durante tiempos muy breves; b) mediante un entrenamiento específico que aumente la fracción de masa muscular en las piernas; c) los glúteos sólo forman parte parcialmente de la estructura móvil de las piernas aunque contribuyen a moverlas, con lo que la masa muscular activa es superior. Las velocidades alcanzadas por los grandes velocistas son sólo posibles, durante algunos segundos, gracias a la puesta en marcha del metabolismo anaerobio en las fibras rápidas y a la contribución de energía elástica en tendones y ligamentos que hace menos costoso el movimiento de oscilación de las piernas.

Observación. La potencia mecánica desarrollada por los ciclistas. Ya dijimos anteriormente que hay atletas de condiciones físicas excepcionales que pueden llegar a generar una potencia mecánica del orden de 400 W durante tiempos del orden de una hora. Eddy Merckx, por ejemplo, fue capaz de desarrollar una potencia mecánica media de 455 W durante una hora en un ensayo de laboratorio realizado sobre bicicleta estática en 1975. Por su parte, Miguel Indurain, cuando batió el record de la hora en 1994, generó una potencia media de casi 510 W , aunque, debido a su peso, la potencia por kilogramo de masa corporal fue semejante a la desarrollada por los otros grandes campeones del ciclismo.

En las etapas contrarreloj de montaña, los grandes especialistas alcanzan un promedio de 6 W/kg a 7 W/kg, lo que resulta, según el peso de cada uno, en una potencia mecánica total comprendida entre 400 W y 450 W. De esa cifra, una fracción muy importante corresponde al gasto energético necesario para elevar el cuerpo y la bicicleta contra la fuerza de la gravedad. En efecto, si consideramos un recorrido de 21,5 km con una pendiente media del 7,5 por ciento (que son los parámetros que corresponden a la subida del Mont Ventoux), la diferencia de nivel, Δz , que es preciso cubrir es:

$$\Delta z = 21.500 \times \frac{7,5}{100} = 1.610 \text{ m}$$

Un ciclista de 65 kg sobre una bicicleta de 8 kg debe gastar, por tanto, una energía E, sólo para cubrir ese desnivel contra la fuerza de la gravedad:

$$E = mg\Delta z = 73 \times 9,8 \times 1.610 = 1.151.800 \text{ J}$$

La velocidad con que los campeones recorren una etapa de estas características es algo superior a los 20 km/h, por lo que en el caso que estamos considerando, el ciclista tardaría en completar la etapa alrededor de una hora, con lo que la potencia que es necesario desarrollar para contrarrestar la gravedad resulta ser:

$$P = \frac{1.151.800}{3.600} = 320 \text{ W}$$

que, como se ve, es una fracción considerable de la potencia total generada. El resto se gasta en el movimiento de las piernas y en contrarrestar la fuerza del rozamiento con el aire y de las ruedas de la bicicleta con la carretera, es decir, energía mecánica de traslación.

A estas velocidades (de algo más de 20 km/h) el gasto energético que hay que hacer para vencer el rozamiento con el aire es del orden de 45 W. Como vimos en el capítulo 3, la fuerza de rozamiento con el aire es proporcional al cuadrado de la velocidad, lo que implica que la potencia necesaria para contrarrestarlo es proporcional al cubo de la velocidad. Así, en una contrarreloj llana larga, la velocidad media es del orden del doble que en una cronoescalada, por lo que la potencia consumida para vencer el rozamiento es del orden de $45 \times 2^3 = 360 \text{ W}$, mientras que no es necesario ahora gastar ninguna energía para elevar el cuerpo contra la gravedad terrestre. Se ve, por tanto, que en una cronoescalada el grueso de la energía consumida se “gasta” en ascender contra la fuerza de la gravedad, mientras que en

una etapa contra el reloj llana se “gasta” sobre todo en contrarrestar el rozamiento con el aire. Una potencia mecánica de 400 W implica un consumo metabólico del orden de $4 \times 400 \text{ W} = 1.600 \text{ W}$ para mover los músculos de las piernas más unos 200 W para atender al resto de las funciones vitales, incluido el movimiento del diafragma, corazón, etc., lo que da como resultado los aproximadamente 1.800 W de la tabla 5.2.

Como se ve también en esa tabla, el consumo de oxígeno asociado a ese nivel de ejercicio es de unos 5.400 ml O_2 /min, oscilando en los ciclistas de élite entre los 5.000 y los 5.500 ml O_2 /min, y superando esta cifra en casos excepcionales, como Miguel Indurain, al que se le ha llegado a medir un consumo de 6.400 ml O_2 /min. El consumo por unidad de masa corporal para estos casos de ejercicio al máximo nivel de exigencia varía entre los 70 y los 80 ml O_2 /(kg \times min). Este ritmo puede llegar a superarse en pruebas de atletismo y esquí de fondo, habiéndose llegado a medir en 1982 hasta 93 ml O_2 /(kg \times min) para un esquiador de fondo escandinavo, lo que supone, hasta la fecha, el récord mundial de consumo sostenido de oxígeno.

Pérdida de energía por rozamiento

Hemos dicho que **las pérdidas de energía por rozamiento son pequeñas a velocidades no muy elevadas**. Hagamos una estimación de las mismas. En el movimiento de las piernas hay un gasto energético por rozamiento en las articulaciones, especialmente en las de las caderas. Gracias al líquido sinovial se disminuye enormemente el coeficiente de rozamiento entre las superficies de los huesos en contacto, consiguiéndose una eficiencia mecánica muy grande. El coeficiente de rozamiento dinámico es del orden de 0,003, mientras que la fuerza normal que soporta cada articulación, para una persona en equilibrio de unos 70 kg, cada una de cuyas piernas pesa unos 11 kg, es:

$$F_N = \left(\frac{1}{2} \times 70 - 11\right) \times 9,8 = 235 \text{ N}$$

y la fuerza de rozamiento es:

$$F_R = 0,003 \times 235 = 0,705 \text{ N}$$

Si en una zancada, los huesos de la articulación se desplazan uno respecto del otro unos 3 centímetros, el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento en cada zancada y articulación es:

$$W_R = 0,705 \times 0,03 = 0,021 \text{ J}$$

Tenemos que tener en cuenta que hay fricción en las dos caderas y en las dos rodillas, más el hecho de que la fuerza de contacto en la articulación, cuando se está en movimiento, es superior a la que existe en el equilibrio debido a los impactos de los pies contra el suelo. En total, el trabajo de las fuerzas de rozamiento en todas las articulaciones, o lo que es lo mismo, la energía perdida por fricción, es superior en más de un factor diez a la calculada considerando sólo la cadera, unos $0,3 J$ en cada zancada. Para una marcha lenta, la frecuencia de zancada es del orden de una por segundo, lo que implica que la potencia disipada es de unos $0,3 W$, lo que representa menos de un 3 por ciento de la potencia mecánica desarrollada.

Si la frecuencia de zancada es superior, por ejemplo tres por segundo para velocidades elevadas, la potencia disipada es del orden de $1 W$, que sigue siendo un pequeño porcentaje de la potencia total. Añadir el rozamiento existente en el movimiento de las vísceras y otros movimientos internos supone duplicar aproximadamente la energía disipada, todavía muy pequeña respecto de las energías puestas en juego en la locomoción.

Es más importante el rozamiento con el aire, especialmente a grandes velocidades. La fuerza de rozamiento es, según vimos en el capítulo 3:

$$F_R = \alpha v^2$$

con:

$$\alpha = \frac{mg}{v_L^2}$$

donde v_L es la velocidad límite en caída libre en aire. Para una persona de $70 kg$, teniendo en cuenta que dicha velocidad límite es, al nivel del mar, de unos $55 m/s$:

$$\alpha = \frac{70 \times 9,8}{55^2} \approx 0,227 kg/m$$

Y la potencia disipada por el rozamiento con el aire será:

$$P_R = F_R \times v = \alpha v^3$$

Para la marcha lenta, a $1 m/s$ de velocidad, la pérdida energética por rozamiento con el aire supone unos $0,23 W$, del mismo orden que la derivada del rozamiento en las articulaciones, pero a una velocidad de $3 m/s$, la pérdida energética ya asciende a $6 W$, que es el 4 por ciento de la potencia mecánica

desarrollada. Si la velocidad es muy alta, por ejemplo 10 m/s (que corresponde a la velocidad media de un *sprinter* de clase mundial en los 100 metros), la potencia disipada es de unos 230 W , que es una cifra ya considerable. De ahí que exista una diferencia notable en las marcas de las pruebas de velocidad obtenidas en altura y a nivel del mar. En altura la densidad del aire es menor y el parámetro α es también menor, lo que implica que es menor la pérdida energética por rozamiento con el aire.

5.3 Movimiento en torno al equilibrio. Movimiento armónico simple

5.3.1 La fuerza del oscilador armónico

En la anterior sección hemos visto que los mínimos de la energía potencial corresponden a posiciones de equilibrio estable de los sistemas mecánicos. En un mínimo la fuerza es nula y, al separarse el sistema de él debido a una perturbación externa, la fuerza actúa en el sentido de devolverlo hacia la posición de equilibrio. Cuando la separación del mínimo es pequeña, cualquier curva de energía potencial puede aproximarse localmente (en la proximidad del mínimo) por una parábola, para el caso de una sola dimensión. Si resolvemos la ecuación del movimiento para este caso, el resultado será aproximadamente válido cualquiera que sea la forma de la curva, con tal de que no nos alejemos mucho del mínimo. Escogiendo el origen de coordenadas en el punto de equilibrio (el mínimo de la energía potencial) y tomando por convenio como origen de energías el valor de la energía potencial en ese punto, es decir, $U(0) = 0$, resulta:

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (5.14)$$

donde $k = \left[\frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right]_{x=0}$ se llama constante de recuperación y tiene dimensiones:

$$[k] = [\text{energía}]L^{-2} = [F] L^{-1} = MT^{-2}$$

pudiéndose expresar en Nm^{-1} , o bien en $kg \cdot s^{-2}$. En esta aproximación sustituimos la energía potencial $U(x)$ por la parábola (5.14), lo que sólo puede dar resultados válidos cuando el movimiento no se aleja mucho del mínimo. De la energía potencial (5.14), se deriva una fuerza:

$$F = -\frac{dU}{dx} = -kx \quad (5.15)$$

y ambas expresiones se conocen como energía potencial y fuerza del oscilador armónico. La expresión (5.15), que establece la proporcionalidad entre la separación del equilibrio y la fuerza que ésta genera, es muy general y se conoce, en el ámbito de las deformaciones elásticas de los materiales, como ley de Hooke.

La energía total, que se conserva, será, por lo tanto:

$$E = E_{cin} + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (5.16)$$

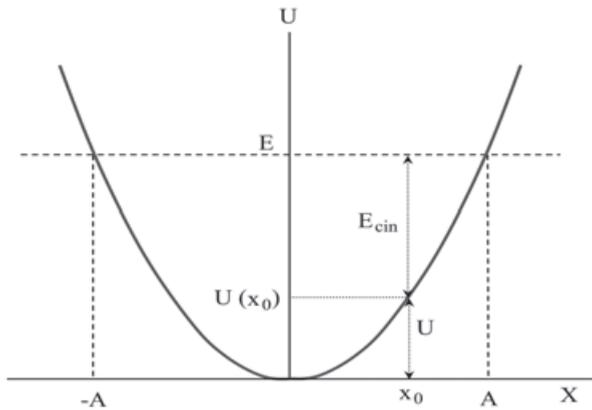


Fig. 5.15. Energía potencial de un oscilador armónico. Para el caso en el que el oscilador se mueva con una energía total E , existen dos puntos de retorno, $x = \pm A$, que corresponden al caso en que la energía sea puramente potencial, $E=U(\pm A)$, y la energía cinética igual a cero. Para cualquier punto x_0 situado entre los puntos de retorno, la energía tiene una componente cinética y otra potencial.

Nótese que la forma del potencial, en este caso, implica que todos los movimientos serán finitos y el móvil no podrá separarse indefinidamente del punto de equilibrio. Dada la simetría alrededor del punto $x = 0$, habrá dos puntos de retorno situados en $x = \pm A$, para los que la velocidad se anulará, y que deberán satisfacer la ecuación:

$$E = 0 + \frac{1}{2}kA^2$$

$$A = \sqrt{\frac{2E}{k}} \quad (5.17)$$

A la cantidad A se le llama amplitud del movimiento y, de la inspección de la curva de la energía potencial, se concluye que **el movimiento de un**

sistema alrededor de una de sus posiciones de equilibrio será oscilatorio entre los dos puntos de retorno.

Observación. Muelles. Un ejemplo macroscópico habitual de fuerzas proporcionales (y de sentido contrario) al desplazamiento, del tipo (5.15), lo tenemos en los muelles. Cuando sujetan a un cuerpo en posición horizontal, el equilibrio se encuentra en una posición que corresponde a la longitud del muelle en reposo, pero si desplazamos el móvil de forma que el muelle se alargue o se acorta, entonces éste ejerce una fuerza sobre el cuerpo siempre en el sentido de llevarlo a la posición de equilibrio y tanto más grande cuanto mayor es la separación de dicha posición.

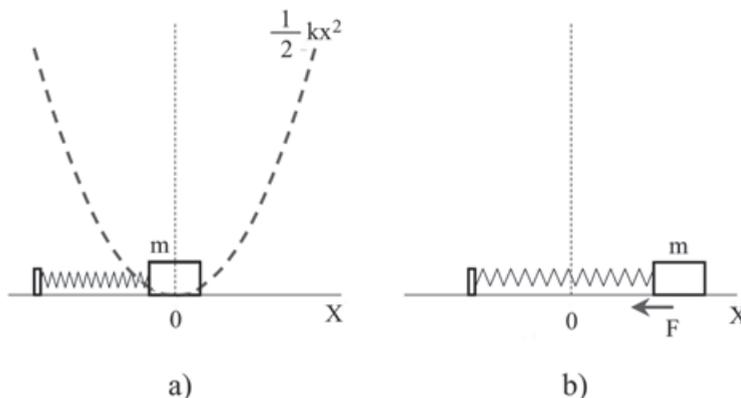


Fig. 5.16. a) Muelle en situación de reposo. La masa m se encuentra en situación de reposo en el mínimo de la energía potencial.

b) Se ha perturbado el estado de equilibrio alargando el muelle y llevando la masa m a otra posición. El muelle ejerce sobre la masa una fuerza que tiende a restaurar el equilibrio generando un movimiento oscilatorio alrededor de dicha posición de equilibrio.

Puesto que el potencial armónico es una aproximación cerca del equilibrio de cualquier curva de energía potencial, todo sistema, aunque no sea el característico arrollamiento metálico de un muelle, o un fragmento de caucho, se comporta de forma análoga a un muelle en las proximidades de un estado de equilibrio estable. **De hecho, todos los materiales responden a este “comportamiento elástico” dentro de un margen, tal como se verá con más detalle en el capítulo 16.**

5.3.2 El movimiento oscilatorio simple

A partir de la forma de la fuerza (5.15), podemos aplicar la segunda ley de Newton y encontrar la ecuación del movimiento:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F = -kx \quad (5.18)$$

cuya solución general tiene la forma:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi) \quad (5.19)$$

donde A y φ son constantes que se ajustan con ayuda de las condiciones iniciales, llamadas amplitud y fase, respectivamente. Por su parte, ω_0 **es un parámetro llamado pulsación, que no depende de las condiciones iniciales sino de las propiedades intrínsecas del oscilador, k y m .** En efecto, a partir de la expresión (5.19) encontramos que:

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = m \frac{d[A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)]}{dx} = -mA\omega_0^2 \operatorname{sen}(\omega_0 t + \varphi) = -m\omega_0^2 x(t)$$

que es, precisamente, la ecuación (5.18), con la condición de que:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Los parámetros A y φ se obtienen a partir de las condiciones iniciales, x_0 y v_0 , de la siguiente forma:

$$x_0 = x(0) = A \operatorname{sen} \varphi \quad (5.20)$$

$$v_0 = x'(0) = \omega_0 A \cos \varphi \quad (5.21)$$

de donde:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \quad (5.22)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega_0 x_0}{v_0} \quad (5.23)$$

De la ecuación (5.19) se sigue que la velocidad de la partícula es:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (5.24)$$

por lo que, sustituyendo en la expresión de la energía total (5.16), queda:

$$E = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A^2 \quad (5.25)$$

Vemos en esta última expresión, a partir de la dependencia explícita con el tiempo de la posición y la velocidad, que **la energía total no depende del tiempo y es, por tanto, una constante del movimiento**. La energía cinética sí que varía a lo largo del movimiento, lo mismo que la energía potencial, pero su suma permanece constante. El valor máximo de la posición se obtiene cuando la función seno de la expresión (5.19) vale 1, y su valor mínimo cuando vale -1 , es decir:

$$-A \leq x \leq A$$

y estas posiciones máxima y mínima corresponden a los puntos de retorno, tal y como se había avanzado en (5.17). Justamente en estos puntos, en los que la función $\sin(\omega_0 t + \varphi)$ es igual a ± 1 , $\cos(\omega_0 t + \varphi) = 0$, lo que implica que la velocidad se anula.

Durante su movimiento, hay una continua conversión de energía cinética en potencial en el oscilador armónico y viceversa. Cuando éste pasa por el origen, su posición es cero, lo que implica que su velocidad es máxima, pero según va aproximándose al punto A , la fuerza armónica lo va decelerando y pierde velocidad al tiempo que gana energía potencial, hasta que, cuando llega a A , se detiene totalmente y toda su energía es potencial (almacenada en el muelle o en el dispositivo que actúe sobre el cuerpo). A partir de ese momento, la fuerza armónica lo lleva hasta el origen de nuevo, convirtiendo la energía potencial en cinética, cuyo máximo se produce al pasar de nuevo por el origen en sentido contrario. El mismo fenómeno se repite ahora hasta llegar al punto $-A$ y volver al mismo estado de partida.

Justamente, cada cierto tiempo, el oscilador ocupa la misma posición y la misma velocidad, es decir, pasa por el mismo estado. Ese intervalo de tiempo recibe el nombre de periodo, T , y es tal que hace que el argumento del ángulo que aparece en las expresiones de la posición y la velocidad cambie en 2π radianes, en cuyo caso, ambas funciones trigonométricas toman el mismo valor:

$$\omega_0(t+T) + \varphi = \omega_0 t + \varphi + 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad (5.26)$$

El inverso del periodo, llamado frecuencia, f , es el número de oscilaciones completas por unidad de tiempo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (5.27)$$

y tiene dimensiones de s^{-1} , siendo el hercio, u oscilación por segundo, su unidad en el Sistema Internacional (Hz):

$$1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$$

A veces, además de la fuerza armónica, actúa sobre el cuerpo una fuerza constante. Es el caso de un muelle colgado de un punto que sujeta un cuerpo sometido a la fuerza de la gravedad a la vez que a la del muelle. Si llamamos F_0 a la fuerza constante, es fácil demostrar, a partir de la ecuación de Newton correspondiente, que el cuerpo ejecuta un movimiento armónico simple, con la misma frecuencia que si no hubiera fuerza constante, pero alrededor de un nuevo punto de equilibrio, desplazado del punto de equilibrio previo en una cantidad x_0 tal que:

$$x_0 = \frac{F_0}{k}$$

es decir, la ecuación del movimiento es:

$$x = x_0 + A \text{ sen}(\omega_0 t + \varphi)$$

Nótese que la nueva posición de equilibrio corresponde a la situación en la que la fuerza armónica contrarresta exactamente la fuerza constante:

$$F_0 - kx_0 = 0$$

5.3.3 Oscilaciones amortiguadas, oscilaciones forzadas y resonancias

En el mundo real, los sistemas macroscópicos oscilantes están sujetos a fuerzas de fricción con el entorno que disipan energía, disminuyendo progresivamente la amplitud de las oscilaciones. Se trata del fenómeno del amortiguamiento. Un oscilador que se mueve en un medio con fricción, que es lo que observamos en la experiencia cotidiana, oscila de forma que la amplitud va disminuyendo de forma exponencial hasta llegar asintóticamente al reposo. Para el caso de una fuerza de rozamiento proporcional a la velocidad, $F_R = -\beta v$, del tipo de las que ya vimos en el capítulo 3, puede demostrarse que la amplitud de las oscilaciones decrece con el tiempo en la forma:

$$A(t) = Ae^{-\frac{\beta}{2m}t}$$

donde A es la amplitud inicial de la expresión (5.17). Puede haber casos en los que el rozamiento es tan grande que el oscilador ni siquiera complete una sola oscilación y se mueva lentamente hacia la posición de equilibrio.

Ejemplo. *Hay insectos que, para aumentar la frecuencia de oscilación de sus alas, poseen estructuras elásticas de resilina en la articulación de las alas. Estas estructuras actúan como muelles que se deforman mediante la acción de un músculo y vibran, con su frecuencia propia de oscilación, generando así el movimiento de las alas. Mientras no hay una nueva contracción muscular, las alas se comportan como osciladores con un movimiento amortiguado debido al rozamiento en las articulaciones y con el aire. La frecuencia de las alas de algunos de estos insectos puede llegar hasta unas 600 oscilaciones por segundo, es decir:*

$$\omega_0 = 600 \times 2\pi \text{ s}^{-1}$$

Supondremos que la masa de cada ala es de $10 \text{ mg} = 10^{-5} \text{ kg}$, y el parámetro $\frac{\beta}{2m}$ es del orden de 20 s^{-1} . La frecuencia de los impulsos nerviosos de la motoneurona que excita el músculo que mueve el ala es, como máximo, de unos 100 por segundo, lo que implica que entre cada dos de ellos consecutivos transcurre una centésima de segundo. En esa fracción de tiempo se producen 6 oscilaciones libres amortiguadas en las que la amplitud va decreciendo. Suponiendo que, inmediatamente después de una contracción muscular, la amplitud de la oscilación es A , al cabo de $\frac{1}{100}$ segundos, justo antes de que se produzca la siguiente contracción, la amplitud habrá disminuido hasta:

$$Ae^{-\frac{\beta}{2m}t} = Ae^{-20 \times \frac{1}{100}} = Ae^{-0,2} \simeq 0,82A$$

Es decir, durante las seis oscilaciones debidas únicamente a la fuerza armónica desarrollada por la estructura de resilina, la amplitud del movimiento de las alas se ha reducido en casi un 20 por ciento. Una vez transcurrido este lapso de tiempo, un nuevo impulso muscular vuelve a tirar de la estructura elástica y recupera la amplitud de oscilación original.

Consideremos ahora el caso de un oscilador armónico con fricción sometido, además, a una fuerza externa que varía periódicamente con el tiempo. En ese caso, el movimiento es la suma del movimiento propio de oscilación más el inducido por la fuerza externa. El primer término contiene la exponencial decreciente que se deriva de la presencia de la fuerza de

fricción, su valor decrece con el tiempo y se anula asintóticamente. Por el contrario, el segundo término, asociado a la presencia de la fuerza externa periódica, de frecuencia igual a la de dicha fuerza externa, tiene una amplitud constante y, a la larga, es siempre el dominante. En consecuencia, una vez transcurrido el tiempo necesario para que el primer término sea despreciable, un oscilador amortiguado sometido a una fuerza externa periódica **describe un movimiento armónico simple con la frecuencia de la fuerza externa y una amplitud fija, no dependiente de las condiciones iniciales.** Es lo que ocurre, por ejemplo, cuando se empuja un columpio con una fuerza periódica. A partir de un cierto instante, el columpio oscila con una frecuencia igual a la de la fuerza externa y no la propia de su oscilación libre. Por eso este fenómeno se conoce como oscilaciones forzadas.

Puede demostrarse que la amplitud de las oscilaciones forzadas varía enormemente en función de la frecuencia de la fuerza externa. Para un cierto valor de la frecuencia externa, la amplitud de la oscilación forzada es máxima, y recibe el nombre de frecuencia de resonancia, mientras que tiende a cero para valores muy distantes de dicha frecuencia de resonancia. En particular, cuando el rozamiento es pequeño, la frecuencia de resonancia es aproximadamente igual a la de oscilación libre del oscilador. **Este fenómeno, de acoplamiento entre el oscilador y la fuerza externa de forma que, para una cierta frecuencia de esta última, se optimiza la amplitud del movimiento resultante, se conoce de forma general con el nombre de resonancia.**

Justamente, cuando se empuja un columpio con una fuerza periódica, éste oscila con una amplitud máxima cuando la frecuencia de la fuerza externa es la de resonancia, que, en el caso de rozamiento pequeño, es muy próxima a la frecuencia de oscilación propia del columpio oscilando libremente.

El fenómeno de resonancia es universal debido a que todo sistema en las proximidades del equilibrio se comporta como un oscilador. Las perturbaciones periódicas externas sobre dicho sistema se traducen en oscilaciones forzadas cuya amplitud es enormemente dependiente de la relación entre la frecuencia de dicha perturbación y la propia del sistema. **La respuesta de éste es marcadamente intensa justamente cuando se produce la resonancia.**

En el caso del columpio, la resonancia se busca instintivamente ajustando la frecuencia del impulso externo para que la amplitud de la oscilación sea máxima. El vidrio de una ventana o de una copa es un sistema que oscila alrededor de su posición de equilibrio debido a múltiples influencias externas. El motor de un coche o el canto de una persona genera vibraciones e impulsos sonoros que actúan como una fuerza periódica externa sobre el cristal y,

cuando su frecuencia es la de resonancia, las oscilaciones del cristal resultan amplificadas, fenómeno que es directamente audible en el caso de las ventanas y, si superan el límite de rotura, acaban rompiéndolo. En la sintonización de los aparatos de radio lo que se hace es modificar, mediante el sintonizador, la frecuencia de oscilación de un sistema electromagnético de forma que entre en resonancia con una de las muchas ondas de radio que capta su antena, justamente la que tenga una frecuencia igual a la de resonancia, y puede, así, amplificarla. Al mover el sintonizador se varía la frecuencia propia y, por lo tanto, se selecciona la frecuencia de la onda externa que entra en resonancia con el sistema. Todas las demás generan señales demasiado débiles para oírse.

En el capítulo 22 veremos que en el oído de los animales existen órganos vibrátiles que entran en resonancia con ondas sonoras externas de frecuencias bien determinadas. Sólo en el caso de interaccionar con una de éstas, la amplitud de la oscilación es suficiente para que se excite una fibra nerviosa y se mande un impulso a través del nervio auditivo. El sonido se capta, así, como una superposición de impulsos asociados a frecuencias diferenciadas.

5.4 Apéndice - Cálculo de la potencia muscular específica

Puede estimarse la potencia muscular máxima a partir de la fórmula de Hill de la fuerza en función de la velocidad (ver el capítulo 2):

$$F = F_0 \frac{1 - \frac{v}{v_M}}{1 + bv}$$

sabiendo que el máximo de potencia se produce cuando el músculo se contrae a una velocidad del orden de $\frac{1}{5}$ de la velocidad máxima. En efecto, la potencia será:

$$P = F \times v = F_0 v \frac{1 - \frac{v}{v_M}}{1 + bv} \quad (5.28)$$

Que, como sabemos, se anula para $v = 0$ y $v = v_M$ y tiene un máximo en un punto intermedio cuya posición exacta depende del parámetro b . Si imponemos ahora que, de acuerdo con las observaciones experimentales, el máximo se produce para $v \simeq 0,2v_M$, podemos fijar b . El máximo de P se calculará sabiendo que su derivada respecto la velocidad se anula en ese punto:

$$\frac{dP}{dv} = F_0 \left\{ \frac{1 - \frac{2v}{v_M}}{1 + bv} - b \frac{v(1 - \frac{v}{v_M})}{(1 + bv)^2} \right\} = 0$$

Simplificando, obtenemos:

$$bv^2 + 2v - v_M = 0$$

y despejando v :

$$v = \frac{\sqrt{1 + bv_M} - 1}{b} \quad (5.29)$$

El máximo de la potencia se alcanza, por lo tanto, para el valor de v dado por la ecuación (5.29). Haciéndolo igual a $0,2v_M$ y despejando b , tendremos:

$$\frac{\sqrt{1 + bv_M} - 1}{b} = 0,2v_M$$

$$b = \frac{15}{v_M}$$

Puede ahora verificarse que la velocidad dada por la expresión (5.29), con $b = \frac{15}{v_M}$, es efectivamente igual a $0,2v_M$. Calcularemos ahora el valor máximo de la potencia:

$$P_M = F_0 \times 0,2v_M \frac{1 - 0,2}{1 + \frac{15}{v_M} \times 0,2v_M} = 0,04 \times F_0 \times v_M$$

La potencia máxima por unidad de masa muscular será:

$$\frac{P_M}{m} = \frac{P_M}{\rho V} = \frac{0,04 F_0 v_M}{\rho S l}$$

donde ρ es la densidad del músculo, que tomaremos igual a la del agua, y V el volumen, igual al producto de la sección por la longitud. Tomando los valores ya conocidos para la fuerza máxima de unos 300.000 N/m^2 y la velocidad de contracción máxima, para músculos de fibra lenta, de unas 5 longitudes por segundo, resulta:

$$\frac{P_M}{m} = \frac{0,04}{1000 \text{ kg} / \text{m}^3} \times 3 \times 10^5 \text{ N} / \text{m}^2 \times 5 \text{ s}^{-1} = 60 \text{ W} / \text{kg}$$

que es el valor promedio medido experimentalmente.

5.5 Ejercicios propuestos

Ejercicio 5.1 *Sobre un cuerpo actúa una fuerza $\vec{F} = (x^2 + y^2)\vec{i} + 2xy\vec{j}$. Hallar el trabajo efectuado por la fuerza al moverse el cuerpo del punto (0,0) al punto (2,4) en el plano XY siguiendo las siguientes trayectorias:*

1. A lo largo del eje X desde (0,0) hasta (2,0) y desde este último punto hasta el (2,4), paralelamente al eje Y.
2. A lo largo del eje Y desde (0,0) hasta (0,4) y desde este último punto hasta el (2,4), paralelamente al eje X.
3. A lo largo de la recta que une los puntos inicial y final.
4. A lo largo de la parábola $y = x^2$.
5. Encontrar la energía potencial de la que deriva esta fuerza.

$$\text{Sol.: } 1), 2), 3), 4) W = \frac{104}{3} \text{ J}; \quad 5) U = \frac{1}{3}x^3 + xy^2$$

Ejercicio 5.2 *Una persona salta sobre un trampolín que está a 5 m de altura sobre el nivel de la piscina con una velocidad ascendente de 3 m/s. Calcular: a) la altura máxima que alcanza su centro de gravedad sobre el trampolín, y b) la velocidad con la que toca el agua, suponiendo que la distancia entre el centro de gravedad y las manos es de 1 m en la posición en la que se sumerge.*

$$\text{Sol.: } a) h = 46 \text{ cm}; \quad b) v = 9,3 \text{ m/s}$$

Ejercicio 5.3 *Un esquiador se desliza en un llano con una velocidad de 15 m/s. La pista tiene un tramo ascendente de 50 m de largo con un desnivel de 4 m. Calcular la velocidad al final de la rampa, a) para el caso sin rozamiento, b) suponiendo que el coeficiente de rozamiento dinámico entre los esquís y la nieve es de 0,1. Si la rampa continúa con la misma pendiente, calcular: c) la distancia al cabo de la cual el esquiador se detendrá.*

$$\text{Sol.: } a) v = 12 \text{ m/s}; \quad b) v = 7,0 \text{ m/s}; \quad c) d = 64 \text{ m}$$

Ejercicio 5.4 Un automóvil de 1.000 kg que se mueve a 30 m/s inicia la subida de una cuesta en punto muerto y recorre 150 m antes de detenerse. Suponiendo que la subida tenga una pendiente del 7 por ciento, ¿cuál es el coeficiente de rozamiento con el suelo suponiendo que el rozamiento con el aire es despreciable?

Sol.: $\mu = 0,24$

Ejercicio 5.5 Un saltador de pértiga llega al punto en el que inicia el salto con una velocidad de 10 m/s. Suponiendo que la pértiga permite transformar energía cinética en potencial sin ninguna pérdida, calcular la altura máxima sobre la que puede pasar. Se supondrá que el centro de gravedad está a 1 m de altura sobre el suelo en el momento del despegue, que la masa de la pértiga es despreciable frente a la del cuerpo del atleta, que la técnica de salto le permite superar el listón aun cuando su centro de gravedad esté 20 cm por debajo y que es necesaria una velocidad residual para poder pasar sobre el listón de 1 m/s.

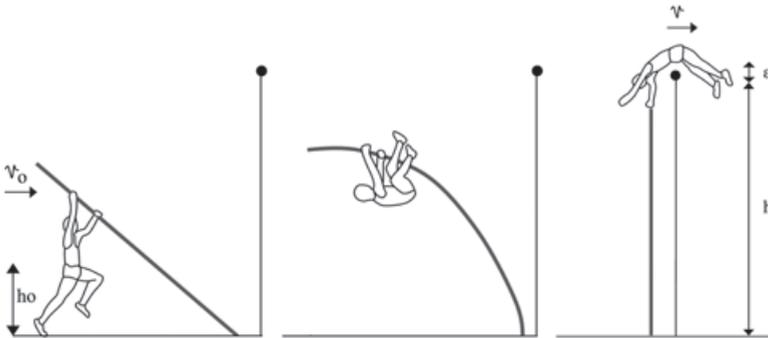


Fig. 5.17. Saltador de pértiga.

Sol.: $h = 6,25 \text{ m}$

Ejercicio 5.6 La central hidroeléctrica de Aldeávila, en el río Duero, tiene una potencia instalada de 1.140 MW y produce, por término medio, 2.500 GW/h de energía al año. La altura del salto de agua que sirve para transformar la energía potencial del agua embalsada en energía eléctrica es de 140 m:

1. Calcular la potencia media anual realmente desarrollada.
2. Calcular el caudal de agua que cae cuando está funcionando a la máxima potencia

Sol.: 1) $P_{\text{media}} = 285 \text{ MW}$; 2) Caudal máximo = $830 \text{ m}^3/\text{s}$

Ejercicio 5.7 Calcular el trabajo que hace una fuerza horizontal para arrastrar un cuerpo de 10 kg de masa a lo largo de 10 metros, con velocidad constante, sobre una superficie con un coeficiente de rozamiento dinámico $\mu = 0,6$.

Sol.: $W = 588 J$

Ejercicio 5.8 Se arrastra la misma masa que en el problema anterior con una fuerza que tira de ella y forma un ángulo de 30° con la horizontal. Calcular de nuevo el trabajo de la fuerza al desplazar el cuerpo a velocidad constante a lo largo de 10 m (ver figura 5.18).

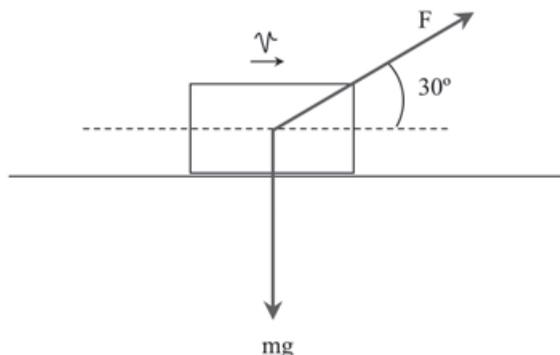


Fig. 5.18. Desplazamiento horizontal de un cuerpo por una fuerza oblicua.

Sol.: $W = 436 J$

Ejercicio 5.9 Sobre una partícula actúa una fuerza que deriva de la siguiente energía potencial:

$$U(x) = 3x^2 - x^3$$

1. Trazar el gráfico de $U(x)$.
2. Determinar la dirección de la fuerza en los intervalos apropiados de la variable x .
3. Analizar los posibles movimientos de la partícula para diferentes valores de su energía total.
4. Hallar las posiciones de equilibrio.

Sol.: 2) $[-\infty, 0] \rightarrow F > 0$; $[0, 2] \rightarrow F < 0$; $[2, \infty] \rightarrow F > 0$

3) $E > 4 \rightarrow$ infinito; $E < 4$ ($-1 < x < 2$) \rightarrow finito; $E < 4$ ($x > 2$) \rightarrow infinito

4) $x = 0$, estable; $x = 2$, inestable

Ejercicio 5.10 Un cuerpo de 1 kg de masa se halla pendiente de un hilo sin masa de longitud igual a 1 m y sujeto por el otro extremo. Lanzamos

horizontalmente un proyectil de 20 g de masa que choca con el cuerpo y queda incrustado en él. Utilizando la conservación del momento en el choque, calcular: a) la velocidad mínima del proyectil para que, tras el choque, el conjunto describa una circunferencia en el plano vertical; b) la energía que se pierde en el momento del choque y se disipa en forma de calor.

Ayuda: el cuerpo debe llegar a la posición más elevada con una velocidad suficiente como para que la fuerza centrífuga compense su peso y el hilo siga tenso.

Sol.: a) $v = 357 \text{ m/s}$; b) $1.250 \text{ J} = 98$ por ciento de la energía incidente.

Ejercicio 5.11 Una bala de plomo incide sobre una superficie rígida de acero. Sabiendo que el calor específico del plomo es 0,03 calorías por gramo y por grado, y que la temperatura de fusión es de 327°C , calcular la velocidad con que tiene que incidir para que se funda suponiendo que el 90 por ciento de la energía de colisión es absorbida por la bala en forma de calor (la temperatura ambiente es de 20°C).

Sol.: $v = 292 \text{ m/s}$

Ejercicio 5.12 Un lanzador de peso necesita imprimir a la bola, que tiene una masa de 7 kg (y al antebrazo y mano, que supondremos con una masa igual a 2,3 kg) una velocidad de 14 m/s. Sabiendo que la velocidad del tronco en el momento de lanzar es de 3 m/s y que la distancia a lo largo de la cual el músculo extensor empuja al antebrazo y peso es de 90 cm, calcular: a) el trabajo realizado por dicho músculo, b) la fuerza que ha debido ejercer a lo largo de la distancia de aceleración, c) el radio del músculo extensor (recordar que la fuerza muscular es del orden de 30 N/cm^2).

Sol.: a) $W = 870 \text{ J}$; b) $F = 966 \text{ N}$; c) $r = 3,2 \text{ cm}$

Ejercicio 5.13 Un avión volando a velocidad uniforme v_0 debe contrarrestar una fuerza de rozamiento proporcional al cuadrado de la velocidad (recuérdese que una fuerza de ese tipo tiene la forma $F_R = \frac{1}{2} C_A \rho_f S v^2$).

Suponiendo que la potencia de los motores permanezca constante y que está volando a una altura en que la densidad del aire es ρ_0 , calcular: a) la relación que existe entre la velocidad en aire con una densidad distinta y la velocidad y densidad iniciales, b) suponiendo que la densidad del aire varía con la altura de acuerdo con la expresión $\rho = \rho_0 e^{-0,13(z-z_0)}$, donde z y z_0 se expresan en kilómetros, calcular la velocidad a que se moverá si el avión vuela 5 km más alto.

$$\text{Sol.: a) } v = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{\frac{1}{3}} v_0; \quad \text{b) } v = 1,24v_0$$

Ejercicio 5.14 ¿Cuál es la velocidad de consumo de oxígeno durante el sueño suponiendo una potencia metabólica de 80 W?

$$\text{Sol.: } VO_2 = 4 \text{ mlO}_2/\text{s} = 14,4 \text{ lO}_2/\text{hora}$$

Ejercicio 5.15 Una persona de 70 kg sube un tramo de escalera de 10 m de altura en 25 s. ¿Qué energía metabólica ha consumido y qué potencia metabólica ha debido desarrollar? (Tómese una potencia metabólica base igual a 160 W y un rendimiento muscular del 25 por ciento).

$$\text{Sol.: } E = 30.720 \text{ J}; \quad P = 1.230 \text{ W}$$

Ejercicio 5.16 La potencia mecánica de un ciclista pedaleando a una velocidad constante de 6 m/s es de 130 W.

1. ¿Cuál es la fuerza de rozamiento ejercida por el aire y la carretera?
2. Si se inclina y adopta una posición más aerodinámica, de forma que la fuerza de rozamiento disminuye en un 20 por ciento, ¿qué velocidad alcanzará con la misma potencia?
3. Si la potencia metabólica base es de 160 W y el rendimiento muscular es del 25 por ciento, ¿cuál es la velocidad de consumo de oxígeno?

$$\text{Sol.: 1) } F = 22 \text{ N}; \quad 2) v = 7,5 \text{ m/s}; \quad 3) vo_2 = 34 \text{ ml O}_2/\text{s} = 122 \text{ l O}_2/\text{hora}$$

Ejercicio 5.17 Un escalador de 70 kg asciende por una pendiente hasta alcanzar un desnivel de 1.200 m en 4 horas:

1. Calcular la potencia mecánica necesaria para cubrir ese desnivel.
2. Suponiendo que para caminar en llano necesita una potencia metabólica de 240 W y que el rendimiento muscular es del 25 por ciento, calcular la tasa metabólica total.
3. Si 100 g de cereales de desayuno proporcionan 380 kcal de energía, ¿qué cantidad de cereal debe ingerir para cubrir las necesidades energéticas de la ascensión?

$$\text{Sol.: 1) } P = 57 \text{ W}; \quad 2) P = 468 \text{ W}; \quad 3) 424 \text{ g}$$

Ejercicio 5.18 Consideremos un muelle con una constante de recuperación $k = 500 \text{ N/m}$, que sujeta un cuerpo de masa $m = 5 \text{ kg}$. En el instante inicial se separa dicho cuerpo de la posición de equilibrio una distancia igual a

5 cm. Encontrar pulsación, periodo y frecuencia de la oscilación, así como su energía total. Escribir la ecuación del movimiento.

Sol.: $\omega_0 = 10 \text{ s}^{-1}$; $T = 0,63 \text{ s}$; $f = 1,6 \text{ Hz}$; $E = 0,625 \text{ J}$; $x(t) = 0,05 \cos(10t) \text{ m}$

Ejercicio 5.19 Demostrar que promediando a lo largo de un periodo, el valor medio de la energía cinética de un oscilador armónico es igual al de la energía potencial e igual a la mitad de la energía total.

Ayuda: calcular $\frac{1}{T} \int_0^T E_{\text{cin}} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} mv^2 dt$ y lo mismo para la energía potencial.

Ejercicio 5.20 Una partícula de masa $m = 100 \text{ g}$ está sujeta a un muelle colgado verticalmente. El otro extremo del muelle está fijo al techo. Si el muelle tiene una constante de recuperación $k = 20 \text{ N/m}$ y longitud natural (cuando está en equilibrio sin peso alguno) $l_0 = 10 \text{ cm}$:

1. ¿Cuál es la posición de equilibrio?
2. Calcular el periodo de oscilación.
3. Escribir la ecuación del movimiento suponiendo que éste sea sólo vertical
4. Si el muelle se estira más allá de la posición de equilibrio en una longitud igual a $\frac{l_0}{4}$ y desde el reposo se deja oscilar a la partícula, ¿qué velocidad máxima alcanza ésta?

Sol.: 1) $z_0 = -14,9 \text{ cm}$; 2) $T = 0,44 \text{ s}$; 3) $z(t) = -0,149 + A \sin(14,2 t + \varphi)$; 4) $v_M = 0,35 \text{ m/s}$

Ejercicio 5.21 Un pájaro de 100 g de masa se posa sobre un cable tenso. ¿Cuál es su frecuencia de oscilación sabiendo que, cuando está en reposo, el punto en el que se encuentra el pájaro ha descendido 5 cm desde la posición que ocupaba cuando no soportaba ningún peso?

Sol.: $v = 2,2 \text{ s}^{-1}$

Ejercicio 5.22 El amortiguador de un coche de masa igual a 1.000 kg tiene una constante de recuperación $k = 10^5 \text{ N/m}$. A causa de un bache, se comprime 10 cm y el coche oscila verticalmente. Calcular:

1. La frecuencia de oscilación sin amortiguamiento
2. La constante de amortiguamiento $\frac{\beta}{2m}$ necesaria para que, tras una oscilación, la amplitud se haya reducido a 1 cm (supóngase que la fuerza de rozamiento en el amortiguador es proporcional a la velocidad).

$$\text{Sol.: 1) } v_0 = 1,6 \text{ s}^{-1}; 2) \frac{\beta}{2m} = 0,34\omega_0 = 3,4 \text{ s}^{-1}$$

5.6 Referencias

- Aguilar Gutiérrez, M.: *Biomecánica: La Física y la Biología*. CSIC, 2000
- Alexander, R. McN.: *Locomotion of Animals*. Blackie, 1982
- Alexander, R. McN.: *Mechanics and Energetics of Animal Locomotion*. Chapman&Hall, 1977
- Alexander, R. McN.: “Optimum walking techniques for quadrupeds and bipeds”. *J. Zool. Lond.* **192** (1980) 97
- Benedek, G. B. & Villars, F. M. H. *Physics, with illustrative examples from Medicine and Biology*. Addison Wesley, 1973
- Hill, A. V. “The dimensions of animals and their muscular dynamics”. *Proc. Roy. Inst. GB* **34** (1950) 450
- Roberts, T. J. *et al.*: “Energetics of bipedal running I: Metabolic cost of generating force”. *J. exp. Biol.* **201** (1998) 2745
- Roberts, T. J. *et al.*: “Energetics of bipedal running II: Limb design and running mechanics”. *J. exp. Biol.* **201** (1998) 2753
- Schmidt-Nielsen, K.: “Locomotion: Energy Cost of Swimmig, Flying and Running”. *Science* **177** (1972) 222
- Taylor, C. R. & Rowntree, V. J. “Running on Two or on Four Legs: Which Consumes More Energy?”. *Science* **179** (1973) 186

Capítulo 6. Leyes de escala en los seres vivos

6.1 Tamaño y forma

Encontramos entre los seres vivos una enorme variedad de formas y tamaños. Ambas características son importantes y, en particular, el tamaño es un parámetro fundamental en la estructura y función de un organismo, así como para su propia supervivencia. **Todos los seres vivos están sujetos a las leyes del mundo físico**, tales como la acción de la gravedad, la difusión y transporte de calor, las propiedades elásticas de los materiales, la dinámica de los movimientos, la tensión superficial y otras, **algunos de cuyos condicionamientos no pueden, como veremos, satisfacerse para cualquier forma o tamaño**. La imaginación de los escritores ha generado desde tiempos inmemoriales toda clase de gigantes, *pulgarcitos* y *liliputienses* de formas y funciones similares a las humanas, pero veremos en este capítulo que no es tan fácil conservar las funciones vitales de un organismo cuando se extrapolan sus dimensiones: su configuración corporal, su medio de vida, su metabolismo, su reproducción y el resto de las funciones vitales cambian profundamente con el tamaño.

La forma, por su parte, es con frecuencia una función del tamaño. Como también veremos, las patas de una ardilla o de una vaca no pueden tener la misma estructura debido a la distinta masa de estos dos animales, ni tampoco el tallo de una planta de trigo puede tener la misma proporción respecto de su altura que un árbol. El exoesqueleto es una solución adecuada para mantener la forma y proporcionar la rigidez necesaria para que los músculos generen trabajo mecánico en animales de dimensiones reducidas, pero sus prestaciones son muy mediocres cuando el tamaño aumenta y ha sido necesario que aparezca el endoesqueleto para que existan animales de grandes dimensiones. En una ameba es posible que el oxígeno se difunda directamente hasta llegar a sus mitocondrias para oxidar a los nutrientes, pero ese mismo mecanismo es inviable para animales grandes y complejos que

han debido recurrir a la circulación de un fluido, la sangre, para transportar dicho gas.

Hay formas que son posibles para un tamaño determinado, pero dejan de serlo para un tamaño superior o inferior, por lo que se han producido discontinuidades en el diseño de los organismos. Éstos han debido cambiar evolutivamente forma y tamaño, conjuntamente, para ser viables.

En la historia de los seres vivos, los tamaños grandes han aparecido tardíamente. Los primeros organismos eran microscópicos y una gran parte de los existentes hoy siguen siendo muy pequeños. Junto a éstos han aparecido en el curso de los últimos cientos de millones de años organismos cada vez mayores, de forma que puede detectarse, con carácter general, una tendencia al aumento en las dimensiones de los seres vivos más grandes en cada momento de la historia de la vida.

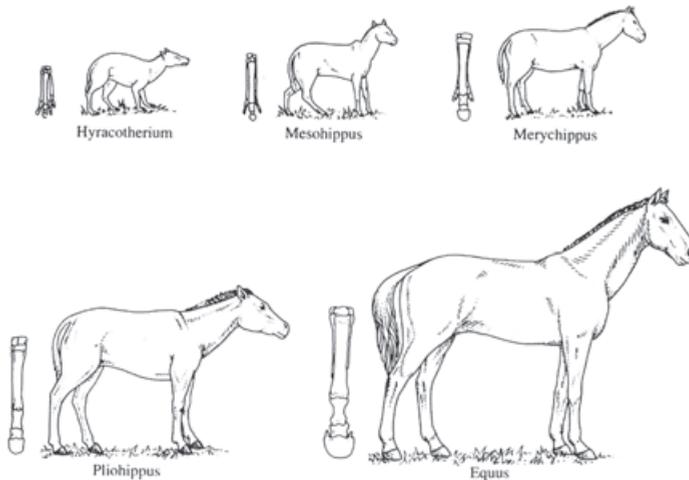


Fig. 6.1. La evolución del caballo a lo largo de 60 millones de años. Además de modificarse la estructura del pie, se ha producido un aumento progresivo del tamaño. Life Nature Library (1964).

Ese volumen creciente no se ha conseguido aumentando el de cada célula individual, sino aumentando su número y variedad. En efecto, las células que conforman todos los seres vivos son, con contadas excepciones de organismos unicelulares, de dimensiones similares en todos ellos, desde las pulgas a las ballenas, entre 10^{-4} m y 10^{-5} m (el cuerpo de las neuronas tiene también este tamaño aproximado, aunque algunas de ellas posean extensiones filiformes del citoplasma, llamadas axones, que llegan a medir centímetros y hasta metros). Los animales grandes necesitan realizar muchas funciones y muy complejas, lo que implica la especialización

celular y el agrupamiento de células en tejidos con funciones y estructura específicas. Así, el aumento de tamaño exige normalmente un aumento de complejidad, en el sentido de una más grande variedad y especialización celular, y, al tiempo, lo hace posible al permitir que un único organismo esté formado por enormes cantidades de células. Los mamíferos grandes, del tamaño humano o superior, tienen billones de células pertenecientes a más de un centenar de clases distintas.

Sin duda, el tamaño puede ser adaptativo y de ahí su variabilidad evolutiva. Por ejemplo, suele haber diferencias entre el tamaño de una especie continental y el de otra emparentada que ha evolucionado de forma autónoma en una isla. Ser grande puede tener ventajas en la competencia con otros organismos por recursos del entorno (piénsese, por ejemplo, en la ventaja que supone para un árbol ser alto y recibir los rayos solares sin que la copa de ningún otro le haga sombra). Al mismo tiempo, requiere una cierta estabilidad ambiental debido a la gran cantidad de recursos externos que se han de consumir de forma continua. Por eso, ser grande puede también tener inconvenientes, especialmente en momentos de crisis en los que cambian las condiciones del medio. En todos los cambios profundos y repentinos sucedidos en la historia de la Tierra, son los organismos más pequeños los que han contado con mayores posibilidades de supervivencia, lo que probablemente explica que en la extinción masiva que tuvo lugar hace 65 millones de años, sobrevivieran los dinosaurios más diminutos, los que ya se habían convertido en aves o estaban en camino de hacerlo, y también los microorganismos, los artrópodos y los mamíferos, que en aquella época eran animales de las modestas dimensiones de un ratón, acostumbrados, además, a salir adelante en las difíciles condiciones creadas por la existencia de animales mucho más poderosos.

El límite inferior de las dimensiones de un ser vivo viene dado por el tamaño de las moléculas complejas en las que se basa el metabolismo y la reproducción, es decir, el tamaño de proteínas y ácidos nucleicos, pero, en realidad, el tamaño mínimo de un organismo autónomo debe ser muy superior ya que la vida requiere la interacción de muchas de estas moléculas. Un virus no se considera un organismo autónomo; es un simple aglomerado de material genético que necesita parasitar el mecanismo metabólico de una célula para poder multiplicarse. Los organismos más pequeños conocidos capaces de realizar las funciones metabólicas y reproductivas por sí mismos son los micoplasmas, algo más grandes que los virus pero más pequeños que las bacterias; por ejemplo, el *Mycoplasma pneumoniae* tiene una masa de tan sólo 10^{-16} kg y un tamaño del orden de 10^{-6} m = 1 μ m.

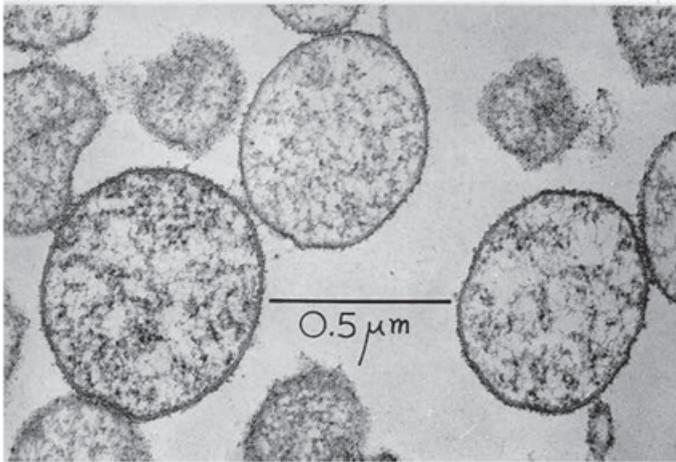


Fig. 6.2. (a) Microfotografía de transmisión de una sección delgada del *Mycoplasma pneumoniae*.

Este microorganismo tiene una dotación genética de entre 500 y 1.000 genes, mucho menor que la de la bacteria *Escherichia Coli*, por ejemplo, pudiendo codificar tan sólo unas 700 proteínas. Se considera que un organismo de este tamaño y nivel de complejidad es el mínimo imprescindible para poseer la capacidad de replicarse autónomamente.

Como veremos más adelante, existe también un tamaño máximo para los organismos terrestres, siendo muy superior el límite en el caso de los acuáticos debido a la sustentación en el agua. Así, el animal más pesado en toda la historia de la Tierra es la ballena azul, con más de 100 toneladas (10^5 kg), mientras que el animal más grande con un modo de vida completamente terrestre ha sido probablemente el *Baluchitherium*, un pariente ya extinto del rinoceronte, con una masa del orden de 30 toneladas, es decir, unas cinco a seis veces más pesado que el elefante africano. Los más grandes dinosaurios conocidos, los Braquiosaurios, llegaron a pesar unas 80 toneladas y se piensa que vivían en un medio semiacuático.

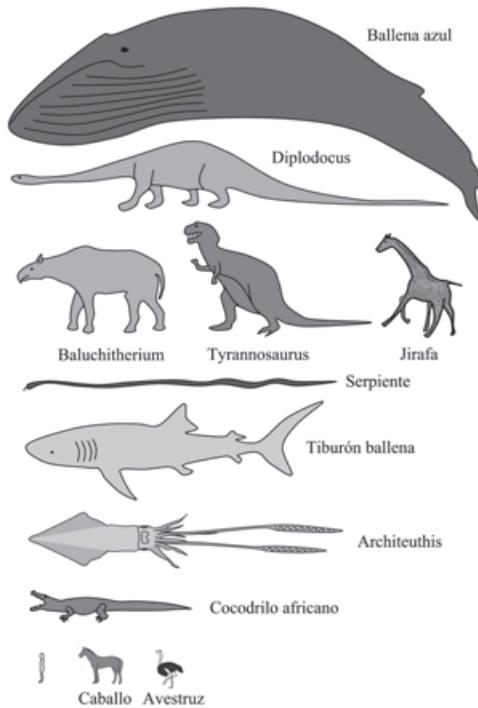


Fig. 6.3. Tamaños relativos de los animales más grandes conocidos, muchos de ellos ya extintos. McMahon y Bonner (1986).

Entre los vegetales, la secuoya gigante puede llegar a tener una masa diez veces superior a la de una ballena azul, pero la mayor parte de esa inmensa mole es tejido muerto en forma de madera (lignina) que sirve para mantener el árbol erguido. Si tomamos como límites superior e inferior la ballena azul y el micoplasma, el cociente entre las masas de uno y otro es de 10^{21} , es decir, 21 órdenes de magnitud separan el tamaño de ambos seres vivos. Para hacernos una idea de la enormidad de esta cifra pensemos que una masa 10^{21} veces superior a la de un elefante equivale a toda la masa de la Tierra. En la tabla siguiente se dan los órdenes de magnitud de la masa y la longitud característica de unos cuantos organismos.

Tabla 6.1. Masa y tamaño de distintos organismos		
Organismo	Masa	Tamaño medio
Micoplasma	10^{-16} kg	$10^{-6} \text{ m} = 1 \mu\text{m}$
Bacteria	10^{-13} kg	$10^{-5} \text{ m} = 10 \mu\text{m}$
<i>Tetrahymena</i> (ciliado)	10^{-10} kg	$10^{-4} \text{ m} = 0,1 \text{ mm}$
Ameba grande	10^{-7} kg	$10^{-3} \text{ m} = 1 \text{ mm}$
Abeja	10^{-4} kg	$10^{-2} \text{ m} = 1 \text{ cm}$
Hámster	10^{-1} kg	$10^{-1} \text{ m} = 10 \text{ cm}$
Humano	10^2 kg	$\sim 1 \text{ m}$
Ballena azul	10^5 kg	10 m

6.2 Análisis dimensional

Como ya hemos visto, las magnitudes físicas deben referirse a un conjunto de unidades definidas de antemano y sus valores sólo tienen sentido en función de dichas unidades. De todas las magnitudes manejadas hasta ahora, únicamente la longitud, el tiempo y la masa son independientes desde el punto de vista dimensional, pudiéndose expresar todas las demás en función de estas tres (podrían tomarse como dimensiones independientes otras tres magnitudes, por ejemplo la energía, la fuerza y la velocidad, aunque nosotros seguiremos siempre utilizando como conjunto básico de dimensiones la longitud, el tiempo y la masa; lo importante ahora es que, **en ausencia de las interacciones electromagnéticas, sólo hay tres dimensiones independientes**). Una primera consecuencia de este hecho es que **todas las ecuaciones que relacionan magnitudes físicas deben ser consistentes desde el punto de vista dimensional**; es decir, todos los sumandos en una expresión, así como los dos miembros de toda ecuación deben tener las mismas dimensiones.

Otra consecuencia es que, en muchos casos, podemos encontrar la dependencia entre magnitudes físicas sólo a partir de sus dimensiones sin necesidad de conocer la dinámica subyacente. Por ejemplo, suponiendo que sepamos que el periodo de oscilación de un péndulo depende de su longitud

y de la aceleración de la gravedad g , aunque no la forma concreta de esta dependencia, podemos partir de una forma genérica del tipo:

$$T = k \times l^a \times g^b \quad (6.1)$$

donde k es una constante sin dimensiones, y encontrar los exponentes a y b para que la ecuación anterior sea dimensionalmente correcta. En efecto:

$$[T] = T = L^a \times L^b \times T^{-2b}$$

de donde se sigue:

$$a + b = 0$$

$$-2b = 1$$

y los valores que satisfacen estas ecuaciones son $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$. Es decir:

$$T = k \sqrt{\frac{l}{g}}$$

El análisis dimensional no nos permite conocer el valor de la constante adimensional k , que en este caso es igual a 2π , pero, sin tener que desarrollar una teoría para el péndulo, podemos saber que su periodo varía con la raíz cuadrada de la longitud, de forma que aumentando ésta en un factor 4 aumenta el periodo en un factor 2, y también que es proporcional al inverso de la raíz cuadrada de la gravedad, de forma que un péndulo cuyo periodo sea de un segundo sobre la Tierra oscilaría en la Luna, cuya gravedad es un sexto de la terrestre, con un periodo igual a $\sqrt{6} = 2,45$ s.

Si no supiéramos *a priori* que el periodo es independiente de la masa podríamos haber introducido un término en m^c en la fórmula (6.1) y nos habría resultado que el exponente c es cero, es decir, la independencia de la masa puede detectarse también a partir del análisis dimensional.

Ejemplo. *Encontrar, a partir del análisis dimensional, la relación entre la velocidad de caída de un cuerpo y la altura desde la que se deja caer. La velocidad no puede depender más que de la altura, la masa y la aceleración de la gravedad, así que:*

$$v = k \times h^a \times g^b \times m^c$$

$$LT^{-1} = L^a L^b T^{-2b} M^c \quad (6.2)$$

donde k es, de nuevo, una constante sin dimensiones. De la expresión (6.2) deducimos que:

$$a + b = 1$$

$$1 = 2b$$

$$c = 0$$

cuya solución es $a = b = \frac{1}{2}$. Es decir,

$$v = k\sqrt{hg}$$

Ya sabemos del capítulo 1 que $k = \sqrt{2}$, pero con ayuda del análisis dimensional podemos encontrar la dependencia de la velocidad con la altura y la gravedad y demostrar que no depende de la masa del cuerpo que cae.

Tienen especial importancia, en la descripción de los fenómenos físicos, **las magnitudes sin dimensiones**, puesto que su valor es un número puro, independiente de las unidades elegidas. Las más sencillas son los cocientes de magnitudes dimensionales, por ejemplo, el ángulo (expresado en radianes) es simplemente el cociente entre el arco correspondiente a dicho ángulo y el radio de la circunferencia, es decir, el cociente entre dos longitudes:

$$\alpha = \frac{s}{R}$$

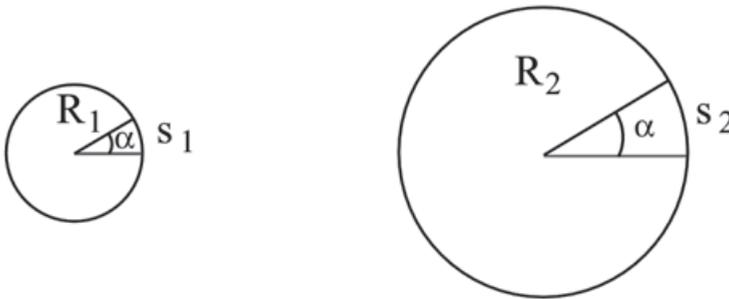


Fig. 6.4. El ángulo $\alpha = s/R$ no tiene dimensiones y, por lo tanto, es el mismo en los dos casos aunque el arco y el radio tengan longitudes distintas en las dos circunferencias de la figura.

El que una cantidad sea adimensional implica que vale lo mismo independientemente del valor de las magnitudes que entran en su definición, con tal de que se expresen en las mismas unidades. Otra magnitud adimensional es el coeficiente de rozamiento estático μ_0 , definido como el cociente entre el módulo de la fuerza necesaria para mover un cuerpo sobre una superficie sólida y el módulo de la fuerza normal que mantiene unido el cuerpo a la superficie. No importa tampoco cuál sea dicha fuerza normal; la fuerza necesaria para mover al cuerpo tomará un valor tal que el cociente es una cantidad fija.

Pueden definirse algunas cantidades sin dimensiones de interés en el mundo de la biología. Por ejemplo, la masa del corazón de los mamíferos dividida por la masa corporal es siempre aproximadamente igual a 0,006 (el 0,6 por ciento) con algunas desviaciones sólo en el caso de los animales más pequeños:

$$\frac{m_{cor}}{M} = 0,006$$

El periodo de gestación de un animal en comparación con la duración promedio de su vida resulta ser del 1,5 por ciento aproximadamente (con la excepción notable de los humanos en los que el tiempo de gestación es del orden del 1 por ciento). Más adelante veremos muchas otras cantidades adimensionales que parecen ser constantes en todos los seres vivos o, por lo menos, en amplias clases de éstos, y que se caracterizan por ser independientes del tamaño corporal.

Otras cantidades adimensionales ya introducidas en los capítulos precedentes a propósito del movimiento de los seres vivos y de las fuerzas de fricción en un fluido son los números de Froude y de Reynolds. Ambos son parámetros sin dimensiones cuyo valor es independiente de las unidades en que expresemos las magnitudes que los definen.

6.3 Leyes de escala

Llamaremos relaciones de escala, o leyes de escala, a la expresión de los **cambios funcionales y estructurales que tienen lugar como consecuencia de los cambios de tamaño (cambios de escala) en los organismos**. La estructura de éstos viene caracterizada por un conjunto, en principio muy numeroso, de parámetros, y en este capítulo nos referiremos a las variaciones de algunos de éstos que resultan específicamente del cambio de escala del organismo y no de otras causas. Aunque se tiene tendencia a pensar que cambiar la escala de un sistema no tiene demasiadas consecuencias debido a que se mantienen las proporciones entre sus partes, ya desde antiguo se sabe que no es así, incluso en los sistemas más sencillos. Por ejemplo, una cuerda que crece manteniendo la misma proporción entre anchura y longitud llegará a romperse inevitablemente por su propio peso. En efecto, la resistencia a la rotura depende sólo de la sección transversal de la cuerda mientras que el peso depende del volumen, de forma que este último crece más rápidamente que la sección y, tarde o temprano, se llegará al límite de rotura. En los seres vivos ocurren fenómenos parecidos que obligan a cambiar su organización interna si su tamaño aumenta (o disminuye).

6.3.1 Relaciones de escala isométricas

Dos cuerpos son semejantes cuando la razón entre las dimensiones lineales que lo caracterizan es la misma, cualesquiera que sean éstas. Por ejemplo, dos triángulos son semejantes si la razón entre los lados de uno y otro es la misma para los tres, lo que implica que también lo es para las alturas, es decir, los segmentos que parten de cada vértice y son perpendiculares al lado opuesto, o cualquier otra magnitud lineal que se defina.

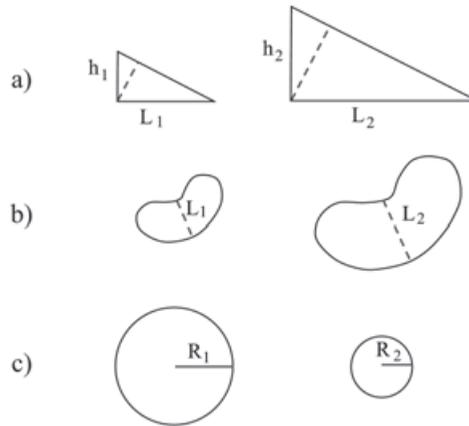


Fig. 6.5. Figuras semejantes. a) Triángulos cuyos tres ángulos son iguales y cuyos lados están en la proporción 1:2. b) Figuras irregulares semejantes. c) Todas las circunferencias son semejantes porque están caracterizadas por una sola longitud independiente.

Lo mismo ocurre con dos rectángulos o dos figuras de forma irregular, tal como puede verse en la figura 6.5. Dos círculos son siempre semejantes porque están caracterizados por una sola dimensión lineal que es el radio. En tres dimensiones ocurre lo mismo: dos paralelepípedos, por ejemplo, son semejantes si la proporción entre las longitudes de aristas homólogas es la misma para las tres. Dos esferas son, de nuevo, siempre semejantes porque están caracterizadas por una sola dimensión lineal. A los cuerpos semejantes se les llama también isométricos, y a la operación que los relaciona, isometría. Dos perros con la misma forma son isométricos, del mismo modo que lo son, aproximadamente, un caballo percherón y un póny o Gulliver y un liliputiense.

Si la relación entre las alturas de Gulliver y un liliputiense es de 10, el que sean isométricos implica que también es igual a 10 la relación entre las longitudes de los brazos, piernas u orejas, o entre los diámetros de las cabezas.

Sea k la relación entre las dimensiones lineales de dos cuerpos isométricos ($k = 10$ para el caso de Gulliver y el liliputiense). Entonces:

$$L_2 = kL_1 \quad (6.3)$$

donde L_2 y L_1 son longitudes características de los dos cuerpos.

Para objetos bidimensionales, por ejemplo, los triángulos de la figura 6.5, las áreas son:

$$S_2 = \frac{1}{2}L_2 \times h_2 = \frac{1}{2}kL_1 \times kh_1 = k^2S_1$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 = k^2 \quad (6.4)$$

La relación entre las áreas es, por lo tanto, igual al cuadrado de la relación entre las longitudes; y eso ocurre cualquiera que sea la forma de los cuerpos con tal de que sean semejantes.

Para cuerpos tridimensionales, como por ejemplo dos cilindros semejantes, como los de la figura 6.6, las superficies cumplen también esa relación:

$$S_2 = 2\pi R_2 \times h_2 = 2\pi kR_1 \times kh_1 = k^2S_1$$

y la relación entre volúmenes es:

$$V_2 = \pi R_2^2 \times h_2 = \pi(kR_1)^2 \times kh_1 = k^3V_1$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^3 = k^3 \quad (6.5)$$

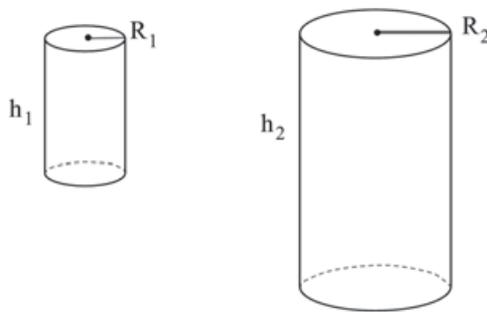


Fig. 6.6. Cilindros semejantes. $\frac{R_2}{R_1} = \frac{h_2}{h_1} = 2$.

La relación entre volúmenes es siempre igual al cubo, y la relación entre superficies igual al cuadrado, de la relación entre longitudes. Así, si

aumentamos el tamaño (dimensiones lineales) de un cuerpo en un cierto factor, conservando su forma, su superficie aumentará como el cuadrado de ese factor y su volumen como el cubo. Este fenómeno se suele expresar con la notación:

$$S \propto l^2 \quad (6.6)$$

$$V \propto l^3 \quad (6.7)$$

Si los cuerpos tridimensionales tienen la misma densidad, entonces las masas son proporcionales a los volúmenes y, por lo tanto, varían como el cubo de las dimensiones lineales:

$$m \propto l^3$$

De las ecuaciones (6.4) y (6.5) se sigue que:

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{L_2}{L_1}\right)^2 = \left(\left(\frac{L_2}{L_1}\right)^3\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (6.8)$$

y, tomando S_1 y V_1 como valores iniciales para un cuerpo cualquiera, resulta que cuando extrapolamos a tamaños distintos, la relación entre la nueva superficie S y el nuevo volumen V será:

$$S = KV^{\frac{2}{3}} \quad (6.9)$$

donde K es una constante que depende de los valores iniciales, es decir, de la forma del cuerpo.

Para esferas de diferente tamaño, la superficie es $4\pi R^2$ y el volumen $\frac{4}{3}\pi R^3$, donde R es el radio. En consecuencia, la relación entre superficie y volumen es muy sencilla:

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} (4\pi)^{\frac{1}{3}} V^{\frac{2}{3}} \approx 4,84 \times V^{0,67} \quad (6.10)$$

La esfera es, precisamente, el cuerpo con menor superficie para un volumen dado. Para un cuerpo con cualquier otra forma, el coeficiente K de la ecuación (6.9) será siempre más grande que 4,84.

A este tipo de relaciones se les llama leyes de escala isométricas. Es útil visualizar las relaciones del tipo $y = kx^a$ en gráficos en los que se representen en abscisas y ordenadas los logaritmos (decimales o neperianos) de los parámetros en lugar de los parámetros mismos. Para el caso que estamos considerando, tendríamos:

$$\log S = \log K + \frac{2}{3} \log V \quad (6.11)$$

lo que implica que obtenemos una recta de pendiente igual a $\frac{2}{3}$. Si consideramos cuerpos de seres vivos, con una densidad constante en todos ellos, aproximadamente la del agua, entonces la recta que relaciona superficie corporal y masa tiene la misma pendiente. En efecto:

$$\log S = \log K \left(\frac{M}{\rho} \right)^{\frac{2}{3}} = \log \frac{K}{\rho^{\frac{2}{3}}} + \frac{2}{3} \log M$$

como puede verse en la figura 6.7.

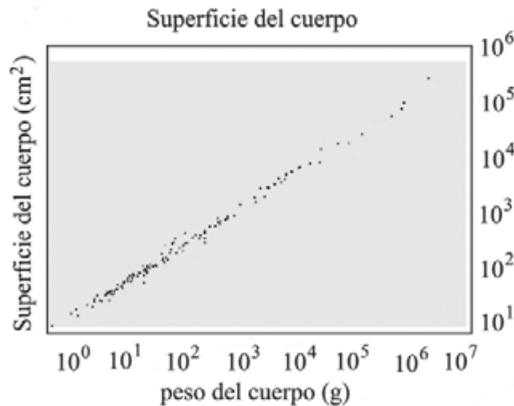


Fig. 6.7. Superficie corporal en función de la masa para vertebrados. Hemmingsen (1960).

Los organismos de distinto tamaño pertenecientes a la misma especie o a especies cercanas son aproximadamente isométricos, es decir, cambian las dimensiones pero no las proporciones. En el caso de los humanos, por ejemplo, la isometría implica que las dimensiones lineales guardan las proporciones entre sí, como puede verse comparando la longitud de los brazos con la altura total. Cuanto más alto sea un individuo, más largos serán sus brazos, con una dependencia lineal del tipo:

$$L_{\text{brazo}} = kL$$

siendo L la altura total. O, en representación logarítmica:

$$\log L_{\text{brazo}} = \log k + \log L$$

lo que debería darnos una recta de pendiente 1. En el gráfico de la figura 6.8 puede verse que, en efecto, a partir de los 4 o 5 años de edad, la relación es isométrica, indicándonos que se mantiene la forma corporal con gran aproximación, mientras

que en las edades más tempranas hay una ruptura de la isometría, lo que refleja que las proporciones de los bebés son distintas de las de los muchachos o los adultos.

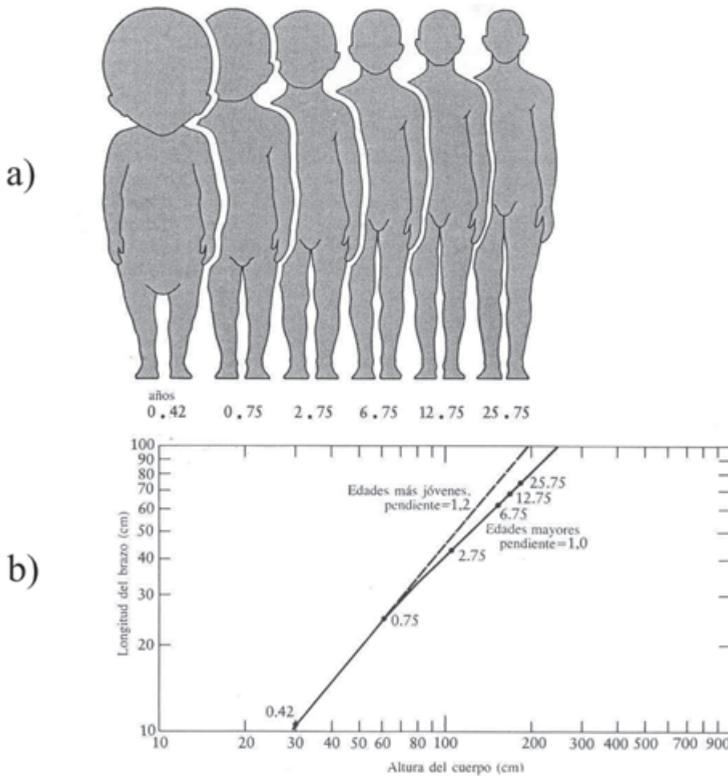


Fig. 6.8. a) El cuerpo humano cambia de forma a medida que aumenta su tamaño. A partir de los 7 años aproximadamente, el crecimiento es isométrico. b) En este gráfico puede verse que la longitud de los brazos es proporcional a la altura del cuerpo para edades superiores a los 7 años, mientras que no ocurre así en edades inferiores, reflejando el cambio en la pendiente de la curva el cambio de forma. A partir de los 7 años, la curva se convierte en una recta de pendiente 1. Medawar (1945).

Otro ejemplo tiene que ver con la fuerza muscular que, como sabemos, es proporcional a la sección transversal de los músculos, es decir a una superficie. Para organismos isométricos la fuerza muscular debe, por lo tanto, ser proporcional al volumen elevado a la potencia $\frac{2}{3}$. Como la masa es proporcional al volumen, deberíamos encontrar una relación del tipo:

$$F_{musc} = kM^{\frac{2}{3}}$$

$$\log F_{musc} = \log k + \frac{2}{3} \log M$$

Ahora la pendiente de la recta que relaciona los logaritmos de las dos magnitudes, fuerza muscular y masa total, debe ser $2/3$ para seres de forma semejante. Y dicha relación es, justamente, la que se encuentra cuando se comparan, por ejemplo, los récords mundiales de halterofilia con el peso corporal de las personas que los han ostentado, como puede verse en la figura 6.9.

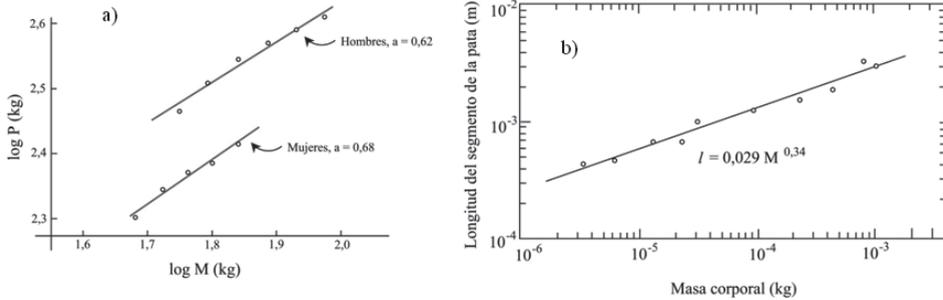


Fig. 6.9. a) Récords mundiales de halterofilia en función de la masa corporal del atleta. P representa la suma de pesos levantados en las dos modalidades del levantamiento (arrancada y dos tiempos). M es la masa corporal que delimita cada categoría de levantador. El exponente alométrico predicho teóricamente es 0,67. b) Longitud de un segmento de pata en función de la masa corporal para cucarachas de la especie *Periplaneta americana*. La pendiente de la recta en el diagrama logarítmico es aproximadamente igual a 0,33. Prange (1977).

Para animales isométricos, la longitud de los miembros, o de un segmento de los mismos, tiene que ser, por su parte, proporcional a $V^{1/3}$, que, a su vez, es proporcional a $M^{1/3}$, siendo M la masa corporal, tal como puede comprobarse en el ejemplo de la figura 6.9.b.

6.3.2 Relaciones de escala alométricas

Como ya hemos observado, hay seres vivos que tienen una forma semejante aunque de distinto tamaño, es decir, son isométricos, como los individuos de una misma especie o de especies próximas. Es el caso de varias especies de roedores, de cuadrúpedos emparentados con el caballo o los elefantes africano y asiático, pero lo normal es que tengan formas distintas, por lo que las comparaciones isométricas no son válidas de forma estricta. No obstante, existe una enorme cantidad de expresiones similares a la (6.9) que relacionan parámetros característicos de los organismos y que se cumplen de forma bastante precisa aun cuando éstos no sean semejantes. Dichas relaciones, que tienen una forma funcional del mismo tipo que las isométricas pero con exponentes que no se derivan de la semejanza geométrica entre los cuerpos, reciben el nombre de alométricas, o leyes de escala en general, y tienen la forma:

$$y = y_0 x^a \quad (6.12)$$

donde y es uno de estos parámetros, x es otro, normalmente la masa del ser vivo, y_0 es una constante multiplicativa que depende de la especie o grupos de especies considerados (en algunos casos es prácticamente la misma para todos los organismos) y a es un exponente que nos dice cómo varía el parámetro y con la variable de referencia x . El valor del parámetro y cuando la variable x es igual a 1 es, precisamente, y_0 . En particular, la relación entre superficie y volumen es una de estas leyes de escala en la que el exponente es:

$$a = \frac{2}{3} \approx 0,67$$

La densidad de los cuerpos de todos los animales es aproximadamente la misma, del orden de la densidad del agua, por lo que la relación entre masa y volumen es la misma para todos ellos y podemos utilizar indistintamente ambas magnitudes como variable independiente, mientras que en los vegetales la densidad puede variar notablemente de unas especies a otras. Por lo tanto, en el caso de los animales, podemos escribir la relación (6.9):

$$S = S_0 M^{0,67} \quad (6.13)$$

donde S es la superficie del animal, M su masa y S_0 es una constante para cada grupo de animales de forma parecida. Podemos encontrar S_0 a partir de la relación entre superficie y volumen $S = KV^{0,67}$, sabiendo que $M = V \times \rho$, donde ρ es la densidad corporal que tomaremos, para los animales, igual a la del agua, $\rho = 1.000 \text{ kg/m}^3$. Por lo tanto, en el Sistema Internacional de unidades (superficie en m^2 y masa en kg):

$$S_0 = \frac{S}{M^{0,67}} = \frac{S}{(\rho V)^{0,67}} = \frac{K}{\rho^{0,67}} = \frac{K}{100}$$

Se han hecho multitud de observaciones experimentales de la relación entre superficie y masa para una gran variedad de organismos. En todos los casos, en grupos de organismos de forma similar, los resultados se ajustan perfectamente a la expresión (6.13). Para los animales, el coeficiente S_0 es del orden de 0,10 en metros cuadrados cuando la masa se expresa en kilogramos, con oscilaciones del orden del 20 por ciento sobre este valor. El valor concreto de este coeficiente varía, naturalmente, en función de la forma de los animales, por ejemplo vale 0,084 para las ovejas, 0,11 para las personas y 0,12 para las serpientes. Un caso que se aleja notablemente del promedio es el de los murciélagos, que tienen una enorme cantidad de superficie de piel en las extremidades delanteras, para los que el coeficiente K vale cerca de 0,60.

Si Gulliver midiera 1,70 m y pesara 70 kg, tendría una superficie corporal $S = 0,11 \times 70^{0,67} \approx 1,90 \text{ m}^2$, mientras que un liliputiense medirá unos 17 cm, tendrá una superficie corporal cien veces menor, es decir, $0,019 \text{ m}^2 = 190 \text{ cm}^2$ y pesará mil veces menos, unos 70 g. Nótese que un roedor de ese tamaño pesa aproximadamente lo mismo que el liliputiense aunque su forma es distinta.

Una ecuación del tipo:

$$y = y_0 M^a \quad (6.14)$$

no es, en sentido estricto, correcta desde el punto de vista dimensional, ya que y_0 no puede tener las mismas dimensiones que y (a menos que $a = 0$). Lo correcto sería escribirla en la forma:

$$y = y_0 \left(\frac{M}{M_0} \right)^a \quad (6.15)$$

siendo y_0 el valor que toma el parámetro y para un valor de la masa igual a M_0 . Sin embargo, tomando M_0 igual a la unidad llegamos a la expresión simplificada (6.14), pero ésta sólo tendrá sentido numéricamente si se especifica el valor de M_0 y se expresa M en unidades de M_0 , que se toma normalmente igual a 1 kg o a 1 g, dependiendo de los casos. Veremos en lo que sigue muchos ejemplos de manejo de este tipo de ecuaciones.

Como ya hemos dicho antes, la representación gráfica de las relaciones alométricas es muy cómoda si en los ejes representamos los logaritmos de las variables y y M . En efecto, tomando logaritmos en los dos miembros de la ecuación (6.14), resulta:

$$\log y = \log y_0 + a \log M \quad (6.16)$$

Se trata, por tanto, de una recta cuya pendiente es, precisamente, el exponente a . Es indiferente tomar logaritmos decimales o neperianos, dado que la relación lineal que resulta es la misma, pero suelen utilizarse logaritmos decimales porque permiten leer más fácilmente los valores de las variables y y M en los gráficos.

No siempre este tipo de relaciones tiene un significado claro. Cuando se analizan empíricamente sólo tienen interés si el exponente a es constante para un rango muy amplio de valores de la masa o para un grupo muy grande de organismos. O cuando es constante excepto en algunos puntos de discontinuidad que muestran la existencia de cambios cualitativos en la organización y funciones de un ser vivo. Sólo en estos casos nos referiremos a la existencia de una ley de escala o relación alométrica. Y aun cuando pueda establecerse la existencia de una relación de este tipo, no siempre es posible

interpretarla y encontrar la razones funcionales, físicas o fisiológicas que la generan. Cuando se consigue, como veremos en lo sucesivo, su esclarecimiento permite comprender mejor la influencia de las leyes físicas y del entorno sobre la organización del ser vivo.

Existen ejemplos de relaciones alométricas con toda clase de valores del exponente. Si a es negativo, quiere decir que el parámetro y disminuye con la masa corporal y se representa en el diagrama logarítmico por una recta de pendiente negativa. Un ejemplo de este caso es el ritmo cardíaco de un animal, que es menor cuanto mayor es su tamaño y satisface una relación alométrica con exponente $a \approx -0,25$.

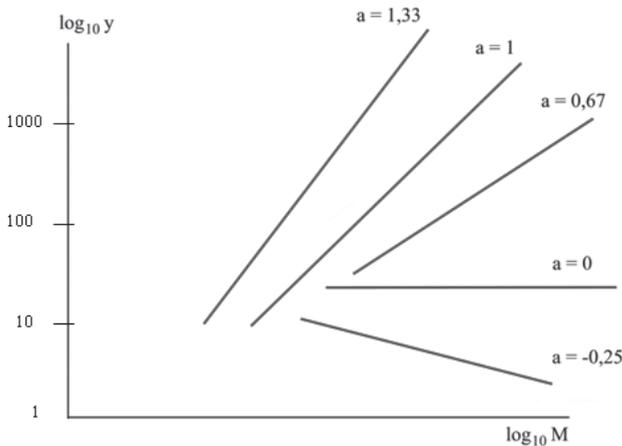


Fig. 6.10. Relaciones alométricas del tipo $y = y_0 M^a$ para distintos valores del exponente a en un diagrama logarítmico.

Cuando el valor del exponente es cero, nos encontramos con un parámetro que no depende de la masa del animal y es constante, como por ejemplo la masa de hemoglobina por unidad de volumen de sangre en los animales o el tamaño de la mayoría de sus células, y se representa mediante una línea horizontal (pendiente cero). Cuando a es positivo pero menor que uno, estamos ante una característica que aumenta con la masa pero a un ritmo menor que proporcional. Es el caso de la superficie corporal, asociada a un exponente $a = 0,67$, o el ritmo metabólico, asociado a un exponente $a = 0,75$. Cuando $a = 1$, nos encontramos ante una propiedad del organismo que es estrictamente proporcional a la masa, como por ejemplo la masa del corazón o el volumen de la sangre en los mamíferos, que son una fracción fija de la masa corporal. Por último, hay parámetros que aumentan más rápidamente que la masa, como ocurre con el peso del esqueleto de los mamíferos, asociado a un exponente a mayor que 1, en concreto, en este caso, $a = 1,09$.

Probablemente la primera relación alométrica descubierta empíricamente, a finales del siglo XIX, se refiere al tamaño del cerebro de distintos animales en función de su tamaño corporal. Se observa que, en los mamíferos, la masa del cerebro es una fracción cada vez menor de la masa del cuerpo y se ajusta a una ecuación del tipo:

$$M_{\text{cerebro}} = kM^{0,67}$$

es decir, se comporta de una forma similar a la superficie corporal. Desde entonces se han hecho muchas mediciones con distintas clases de animales y el exponente se sitúa siempre alrededor de ese valor de 0,67. Eso no quiere decir que el tamaño del cerebro en comparación con el del cuerpo sea el mismo en todos los animales, lo que sólo sería cierto si el parámetro k fuese el mismo para todas las especies; en realidad k toma valores distintos para distintos grupos de animales. Lo que ocurre es que la variación con el tamaño corporal es universal y se ajusta a una relación alométrica con un exponente del orden de 0,67.

Tabla 6.2. Cerebro y masa corporal para distintos grupos de animales	
Grupo	Masa del cerebro
Humanos	(0,08–0,09) $M^{0,66}$
Monos antropomorfos	(0,03–0,04) $M^{0,66}$
Otros primates	(0,02–0,03) $M^{0,66}$
Mamíferos en promedio	0,01 $M^{0,70}$
Aves	(0,001–0,008) $M^{0,66}$
Reptiles	(0,0002–0,0005) $M^{0,67}$

En la tabla 6.2 la masa corporal debe expresarse en kilogramos (es decir, M_0 en la expresión (6.15) es 1 kg) y la masa del cerebro resulta también en kilogramos. Vemos que para un mamífero que pese 1 kg, el cerebro supone, en promedio, un 1 por ciento de su peso corporal, es decir, 10 g, mientras que si pesa 100 kg, el cerebro llegará a:

$$M_{\text{cerebro}} = 0,01 \times 100^{0,66} \approx 0,21 \text{ kg} = 210 \text{ g}$$

El cerebro de este mamífero será más grande pero en relación con la masa corporal será más pequeño, supondrá tan sólo un 0,21 por ciento. Para una

persona de 100 kg, el cerebro pesará 8 veces más, aproximadamente 1,7 kg, es decir, un 1,7 por ciento de la masa corporal. En la tabla puede observarse que el tamaño relativo del cerebro varía mucho de un grupo de animales a otro. Por ejemplo, para la misma masa del cuerpo, un humano tiene un cerebro más del doble de grande que el de un mono antropomorfo, unas cuatro veces mayor que el del resto de los primates, unas ocho veces mayor que el promedio del de los mamíferos y muchísimo mayor que el de aves y reptiles (siempre a tamaño corporal constante). El cerebro de los dinosaurios ha podido ser estudiado a partir de un análisis cuidadoso de los cráneos fósiles y la conclusión es que el tamaño relativo de sus cerebros coincide con el de los actuales reptiles. Sin embargo, a pesar de estas enormes diferencias, el exponente que determina cómo varía en función del tamaño es universal, lo que indica que los mecanismos que acomodan el tamaño del cerebro en función de la escala corporal para los distintos grupos de animales deben ser también universales.

6.4 El tamaño del esqueleto

El esqueleto es un conjunto de estructuras rígidas que proporcionan sostén a los animales, manteniendo su forma e impidiendo que colapsen bajo la acción de su propio peso (en algunos animales, como los gusanos, la forma se mantiene debido a la tensión de los fluidos corporales y la acción de los músculos). También sirven como segmentos rígidos en los que se insertan los músculos y actúan como palancas para generar movimiento. En los vertebrados, el esqueleto es interno, pero en muchos invertebrados, como los artrópodos, el esqueleto consiste en segmentos de forma más o menos tubular en los que se contienen los órganos y tejidos del animal. En cualquier caso, **el esqueleto debe ser lo suficientemente fuerte como para sostener el cuerpo y, lo que es más importante, resistir las tensiones y los impactos que se producen al moverse, caer o saltar**. El problema es que el aumento de su resistencia implica el aumento de su peso, y este aumento puede llegar a dificultar por completo el movimiento. Se impone, pues, un compromiso entre fortaleza y ligereza que es distinto para cada clase de animales. Un coral, por ejemplo, es prácticamente sólo esqueleto: su protección es muy efectiva pero a cambio de que el animal sea inmóvil. Algo similar ocurre con las tortugas: tienen mucha protección y poca movilidad.

Las restricciones impuestas al esqueleto de los animales terrestres son distintas a las de los animales marinos debido a que en estos últimos el empuje de Arquímedes, como veremos en el capítulo 13, compensa casi exactamente la atracción gravitatoria, lo que hace que no estén sometidos a las mismas fuerzas que sobre tierra firme. Los animales marinos más grandes, en particular, colapsarían bajo su propio peso si no estuvieran sumergidos en el agua.

6.4.1 Las proporciones de los huesos

Consideremos las patas de un animal, no importa que sea bípedo o cuadrúpedo, como columnas que deben sostener al cuerpo. **La tensión de rotura (o esfuerzo de rotura) depende de su sección transversal, mientras que el peso que deben soportar depende del volumen total del cuerpo.** También podría depender de la naturaleza del hueso si los huesos de unos animales fueran intrínsecamente más resistentes que los de otros, pero **la estructura del material con el que están hechos todos los huesos de los vertebrados es la misma**, lo que implica que su esfuerzo de rotura (fuerza por unidad de superficie) es también el mismo, unos 170 MN/m^2 en extensión y unos 220 MN/m^2 en compresión, por término medio, es decir, $(1,7-2,2) \times 10^8 \text{ Pa} = (1,7-2,2) \times 10^4 \text{ N/cm}^2$, se trate del hueso de una musaraña o el de un elefante. Sobre la resistencia de los materiales biológicos trataremos más adelante, en el capítulo 16.

Si todos los animales tuvieran las mismas proporciones, sea cual fuere su masa, las dimensiones lineales de los huesos variarían como $M^{0,33}$, en una relación de escala puramente geométrica. Ahora bien, la resistencia de un hueso depende de su sección. Si las dimensiones de un animal aumentan en un cierto factor, pongamos 3, su peso aumenta como el cubo de dicho factor, es decir, se hace 27 veces más grande. Si los huesos del animal aumentan su tamaño en la misma proporción sin variar su forma, entonces su sección transversal aumentará en un factor 9, y serán menos resistentes en comparación con la carga que deben sostener. Los animales más grandes colapsarían al sostenerse sobre miembros con huesos cada vez menos resistentes en relación con su peso y, por lo tanto, la relación de escala proporcional o isométrica (también llamada geométrica) no es posible.

Para que la resistencia relativa sea la misma, la sección de los huesos tendría que aumentar como el peso del animal, un factor 27 en el ejemplo anterior, lo que implica que la dimensión transversal (por ejemplo el diámetro) debe aumentar como $M^{0,5}$ (de forma que la sección transversal fuera proporcional a la masa corporal), mientras que la longitud seguiría aumentando como $M^{0,33}$. En nuestro ejemplo, mientras los huesos aumentan su longitud en un factor 3, su diámetro debería aumentar en un factor $\sqrt{27} \approx 5,2$; **los huesos de los animales grandes se hacen, así, más gruesos y más robustos comparados con los de los animales más pequeños**, como puede observarse en la figura 6.11 cuando se comparan a la misma escala animales de tamaño muy distinto. Se trata de un hecho fácilmente comprobable en la naturaleza cuya razón, como hemos visto, es fácil de comprender en términos de la variación de la resistencia de los huesos y el peso de un animal en función de su tamaño.



Fig. 6.11. Mosca, perro y elefante representados como si tuvieran el mismo tamaño. Nótese la diferencia en el grosor relativo de las extremidades.

Así, si la forma de los huesos respondiera únicamente a la necesidad de sostener el peso del cuerpo de forma estática, las relaciones de escala para sus dimensiones, que expresan la llamada semejanza estática, serían:

$$d \propto M^{0,5} \quad (6.17)$$

$$l \propto M^{0,33} \quad (6.18)$$

donde d es la dimensión transversal del hueso y l su dimensión longitudinal. La masa total de los huesos que sirven para sustentar el cuerpo sería, por lo tanto:

$$M_{\text{huesos}} \propto d^2 l \propto M^{0,5 \times 2} M^{0,33} = M^{1,33} \quad (6.19)$$

es decir, la masa de dichos huesos aumentaría más rápidamente que la masa total del cuerpo y ocuparía cada vez una fracción mayor de la misma.

Ya Galileo, a principios del siglo XVII, llegó a esta conclusión al razonar acerca de los efectos de la gravitación sobre los cuerpos. El cambio de forma de los huesos para conservar su capacidad de sostener el cuerpo es, por lo demás, evidente si comparamos el diámetro relativo a la longitud de los huesos de animales de tamaño muy distinto, o visualizando un animal como el elefante a un tamaño igual al de un perro, como en la figura 6.11. Exactamente el mismo fenómeno ocurre en el caso de columnas que soportan la carga de un edificio, o los tallos que soportan el peso de una planta: cuanto mayor sea ésta más robusta tiene que ser la columna o el tallo.

Pero no es su capacidad para sostener el cuerpo de forma estática el factor primordial en la variación de las proporciones de los huesos: la condición decisiva es la resistencia a las flexiones y los impactos que se producen durante la locomoción. En efecto, durante la carrera o el salto las extremidades de los animales están sometidas a fuerzas que se derivan de las rápidas aceleraciones y deceleraciones y al impacto contra el suelo. Los esfuerzos máximos soportados en la práctica por animales de muy distintos tamaños, desde ratones de unas pocas decenas de gramos hasta los elefantes,

resultan ser muy parecidos, situándose entre los 50 MN/m^2 y los 100 MN/m^2 , como puede verse en la figura (6.12), llegando hasta los 150 MN/m^2 en los casos de movimiento más violento, ya cerca de los límites de rotura mencionados anteriormente. La resistencia de los huesos responde, así, a las exigencias que plantea la locomoción tomando un valor no muy lejano al experimentado realmente en los casos más extremos. Las frecuentes lesiones en el galope de los caballos de carreras o en los ejercicios de los deportistas son un indicio de que están cerca del límite permitido por la estructura ósea.

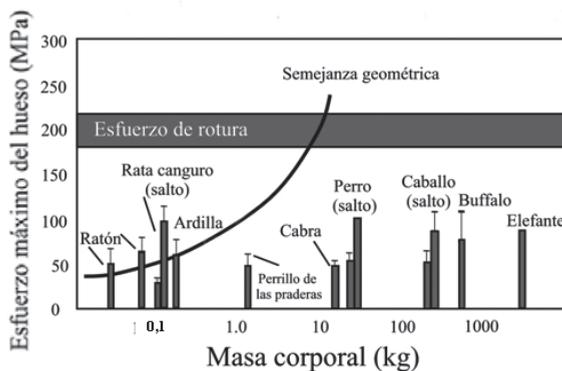


Fig. 6.12. Esfuerzo máximo en los huesos de las extremidades durante la carrera (y el salto, en el caso de la rata canguro, el perro y el caballo) en función de la masa corporal. La curva representa la variación de dicho esfuerzo si las proporciones de los huesos se modificaran de acuerdo con la semejanza geométrica. Biewener (1990).

La relación entre el esfuerzo de rotura y los esfuerzos máximos experimentados durante la locomoción es una medida del factor de seguridad estructural de que dispone el animal, entre 2 y 4 según los casos. Nótese que este factor no puede acercarse demasiado a la unidad porque, antes de que se produzca la rotura del hueso, pueden producirse daños y deformaciones permanentes que impidan al miembro afectado cumplir con su función. **Para los animales más pesados mantener este factor de seguridad implica poseer huesos más robustos, de diámetro cada vez más grande en proporción con la longitud, lo que implica un mayor coste energético en su formación, mantenimiento y transporte.** Debe llegarse, así, a un compromiso entre el coste de la rotura, que puede ser fatal para la integridad del organismo, o bien leve si la reparación es fácil o no compromete gravemente el conjunto de las funciones vitales, y el del aumento de masa necesario para asegurar su solidez.

Las fuerzas que debe soportar la estructura ósea son siempre proporcionales al peso del animal. Iguales al peso cuando el animal está en reposo, tal y como se

ha considerado en la derivación de la semejanza estática, y del orden del doble o el triple del peso cuando se produce el impacto de las extremidades contra el suelo en la carrera o el salto. El esfuerzo, por lo tanto, será proporcional a la masa dividida por la sección de los segmentos óseos que sufren esas fuerzas, es decir:

$$\sigma = \frac{F}{S} \propto \frac{M}{d^2} \quad (6.20)$$

y para el caso de la semejanza geométrica:

$$\sigma_{geom} \propto \frac{M}{M^{\frac{2}{3}}} = M^{\frac{1}{3}} \quad (6.21)$$

En la figura (6.12) se representa, además de los datos experimentales para distintos animales, el esfuerzo dado por la expresión (6.21), asociado a la semejanza geométrica y se ve que aumenta por encima del límite de rotura para masas del orden de unos pocos kilogramos.

Observación. En la figura (6.12) la escala de los esfuerzos es lineal mientras que la de la masa corporal es logarítmica, es decir, se representa σ en función de $\log M$:

$$\sigma_{geom} = kM^{\frac{1}{3}} = k \times 10^{\frac{1}{3} \log M}$$

y, por esta razón, la curva crece exponencialmente en la representación gráfica. La constante k es tal que el esfuerzo máximo se fija igual a 50 MN/m² para una masa $M = 0,1$ kg.

Vemos, por lo tanto, que para animales de masa pequeña, la semejanza geométrica en los huesos basta para garantizar un factor de seguridad suficiente entre los esfuerzos máximos y el límite de rotura, lo que implica que, para este tipo de animales, los huesos pueden mantener las mismas proporciones, aproximadamente, al variar la masa corporal. Por su parte, la semejanza estática, representada por las expresiones (6.17-18), asegura que el esfuerzo máximo no crezca con la masa, ya que:

$$\sigma_{est} \propto \frac{M}{d^2} \propto \frac{M}{M} = \text{constante}$$

pero, a cambio, implica huesos de un gran diámetro, muy pesados, lo que aumenta su coste energético y limita la movilidad. Es lo que ocurre en animales muy pesados, del orden de centenares de kilogramos, con extremidades verticales y poca agilidad. Para los animales de masas intermedias, existe una posibilidad menos costosa en el diseño de sus extremidades, llamada semejanza elástica.

La idea básica para comprender la semejanza elástica parte de considerar que las cargas que sufren las extremidades cuando se apoyan en el suelo durante la carrera crean un momento que tiende a flexionar dichas extremidades y, al flexionarse, aumenta la distancia en perpendicular entre el punto de flexión y la línea de aplicación de la carga, tal como puede verse en la figura 6.13, con lo que el momento aumenta también y el animal se derrumbaría si no tuviera un mecanismo que lo contrarreste.



Fig. 6.13. Sobre la extremidad de un animal actúa su peso creando un momento respecto de la rótula que tiende a flexionarla. Cuando aumenta el ángulo de flexión aumenta también la distancia en perpendicular entre la rótula y la línea del peso, lo que implica que aumenta su momento y se acentúa la tendencia a la flexión. Ésta se detendrá sólo si el músculo extensor crea un momento contrario que lo contrarreste.

Dicho mecanismo es la propia fuerza de recuperación elástica de los huesos, o bien la de los músculos extensores de la extremidad (el grupo cuádriceps en los mamíferos), cuya fuerza al contraerse se opone a la flexión creando un momento de sentido contrario. La extensión del músculo, que se trata como un muelle elástico cuya tensión muscular es proporcional al alargamiento relativo, depende de las dimensiones transversales del hueso, lo que impone ciertas condiciones sobre éstas. El resultado es que la respuesta elástica de los miembros a las tensiones producidas en la marcha requiere que las proporciones varíen según las expresiones:

$$d \propto M^{\frac{3}{8}} \quad (6.22)$$

$$l \propto M^{\frac{1}{4}} \quad (6.23)$$

es decir:

$$d \propto l^{\frac{3}{2}} \quad (6.24)$$

lo que implica un robustecimiento de los huesos a medida que el tamaño crece, ya que el diámetro crece más rápidamente que la longitud, aunque de una forma menos exagerada que como sucede en el caso de la semejanza estática. Nótese que, en este caso, la masa de los huesos resulta proporcional a la masa corporal. El conjunto de las expresiones (6.22-24) es lo que se conoce como semejanza elástica para los huesos de los animales en función de su peso.

En el capítulo 16 se hace una descripción completa de las propiedades elásticas de los biomateriales y, en particular, se demuestra la relación (6.23) a partir del estudio de los límites de rotura por pandeo de una varilla vertical obligada a flexionar por la acción de un peso actuando sobre ella.

El factor de seguridad frente a la rotura

Ya hemos visto anteriormente que la forma de garantizar un factor de seguridad suficiente es mantener el valor de los esfuerzos máximos sufridos por los huesos de las extremidades aproximadamente constantes para todas las masas corporales. Para masas intermedias, desde unos cientos de gramos hasta unos cientos de kilogramos, la variación en el tamaño de los huesos se ajusta a la semejanza elástica en la que $d \propto M^{0,35-0,40}$ (el exponente es del orden de $\frac{3}{8} = 0,375$), lo que implica que, **para extremidades con una misma conformación y orientación**, el esfuerzo máximo tendría la siguiente dependencia con la masa:

$$\sigma \propto \frac{M}{d^2} \propto \frac{M}{M^{0,7-0,8}} = M^{0,2-0,3}$$

Pero, **al tiempo que aumenta la masa, también aumenta la verticalidad de las extremidades de los animales**. Puede demostrarse que, según se hace más vertical la posición de las extremidades, el esfuerzo máximo tiende a ser una constante en función de la masa corporal. Así, **los problemas mecánicos de sustentación y movimiento son, en consecuencia, la causa de que la posición sobre las patas de un animal sea más erguida cuanto más masivo es éste**. En un elefante, son prácticamente verticales, como ocurre también para los caballos o las vacas, mientras que las de un perro están naturalmente más flexionadas y más todavía en el caso de un ratón. El factor de seguridad frente a los impactos sufridos durante la locomoción, para masas comprendidas entre unos 100 gramos y unos 300 kilogramos, se mantiene aumentando ligeramente el diámetro de los huesos más allá de lo requerido por la semejanza geométrica ($\sim M^{0,375}$ frente a $M^{0,33}$) de acuerdo con las relaciones de la semejanza elástica y, sobre todo, adoptando una postura más vertical.

El problema es que, cuando la posición es completamente vertical, todo aumento suplementario en la masa corporal tiene que ser compensado, necesariamente, con el aumento del diámetro de los huesos de las extremidades, haciéndose claramente más robustos, de acuerdo con la semejanza estática. Esto es lo que ocurre para animales, existentes o ya extinguidos, por encima de unos pocos cientos de kilogramos. Para los animales de masa muy pequeña, por debajo de unos 100 gramos, el problema es el contrario. No tienen, en la práctica, problemas de esfuerzo debido a su pequeño peso corporal, mientras que una variación del diámetro de sus huesos según la relación de semejanza elástica disminuiría gravemente su rigidez. Así, la semejanza geométrica garantiza el factor de seguridad apropiado, según puede verse en la figura (6.12), y permite que, para pequeños tamaños, sus huesos no disminuyan demasiado rápidamente de diámetro haciéndolos muy frágiles.

Hay, por lo tanto, tres regímenes de variación del diámetro de los huesos (medida de su robustez) en función de la masa. Para animales muy ligeros, de menos de unos 100 gramos, el problema es asegurar la rigidez, lo que se consigue con variaciones moderadas del diámetro en función de la masa, con un exponente alométrico del orden de 0,33. Para animales intermedios, entre unos 100 gramos y unos 300 kilogramos, el problema de la rigidez disminuye y aumenta el de la seguridad frente a esfuerzos en los impactos, por lo que el diámetro de los huesos de las extremidades crece algo más rápidamente, según el exponente predicho por la semejanza elástica, entre 0,35 y 0,40, y el fenómeno adaptativo más importante es el de la progresiva verticalización de las extremidades. Por último, para animales muy grandes, en los que no se puede ganar seguridad variando la posición de las extremidades porque éstas son ya verticales, la variación del diámetro de los huesos se ajusta más a una relación del tipo de la de la semejanza estática, con un exponente cercano a 0,5 y las consiguientes limitaciones de su movilidad.

Ahora bien, la naturaleza y composición de los biomateriales son muy estables y es poco frecuente su transformación evolutiva. Una importante consecuencia de lo que hemos visto en esta sección es que, utilizando los mismos materiales (el hueso, en este caso) es posible resolver muchos de los problemas surgidos como consecuencia del aumento de masa corporal, y del consiguiente riesgo de rotura del material óseo, mediante el cambio en la forma y configuración de los órganos y miembros (extremidades, en este caso).

En los grandes árboles la relación entre el diámetro del tronco y su longitud responde también a la semejanza elástica, es decir, $d \propto l^{3/2}$, y por las mismas razones. Deben ser capaces de contrarrestar torsiones generadas por fuerzas proporcionales a su peso por medio de la resistencia elástica

del tronco, lo que implica que su diámetro crezca más rápidamente que la longitud. Así, los árboles de porte similar se hacen proporcionalmente más robustos a medida que son más altos, tal y como se verá en detalle en el capítulo 16.

Por el contrario, los mohos del fango, diminutos organismos de unos pocos milímetros de longitud, que tienen forma de alfileres que sostienen en su extremo superior una espora, tienen las mismas proporciones independientemente del tamaño. Son, por lo tanto, isométricos y no presentan el engrosamiento relativo del diámetro respecto de la altura, lo que prueba que las cargas que soportan no son significativas debido a su masa minúscula, y que otro tipo de fuerzas, como las derivadas de la ósmosis o la tensión superficial son más importantes que las tensiones elásticas que puedan sufrir..

6.4.2 La masa relativa del esqueleto

Se han hecho muchos estudios empíricos sobre las dimensiones relativas de los huesos y su dependencia con la masa corporal. Como hemos visto anteriormente, para un rango muy grande de masas, el diámetro se ajusta a una relación alométrica con un exponente comprendido entre 0,35 y 0,40, llegándose hasta 0,33 y cerca de 0,50 para masas corporales muy pequeñas o muy grandes, respectivamente. Pero la dependencia del diámetro con la longitud sólo se ajusta a la expresión $d \propto l^{2/3}$ para el caso de los ungulados. En el resto de los mamíferos, el diámetro aumenta siempre más rápidamente que la longitud, y ésta depende de la masa de acuerdo con un exponente próximo a 0,33.

El resultado es que la variación de la masa ósea en función de la masa corporal está caracterizada por un exponente algo superior a la unidad pero lejos del 1,33 predicho por la relación de semejanza estática. De la comparación de esqueletos de mamíferos cuyo peso se extiende desde menos de 10 gramos a unas 5 toneladas (un factor del orden de un millón), se sigue que el exponente es del orden de 1,09 con un error de $\pm 0,04$:

$$M_{esq}(\text{mamíferos}) \approx 0,09 M^{1,09} \quad (6.25)$$

con ambas masas expresadas en kilogramos. Según esta expresión, un animal de 1 kg de peso tiene un esqueleto que pesa aproximadamente 90 gramos (9 por ciento), mientras que el esqueleto de una persona de 70 kg pesa unos 9,2 kg (13 por ciento) y el de un elefante de 5 toneladas pesaría unos 970 kg (19 por ciento).

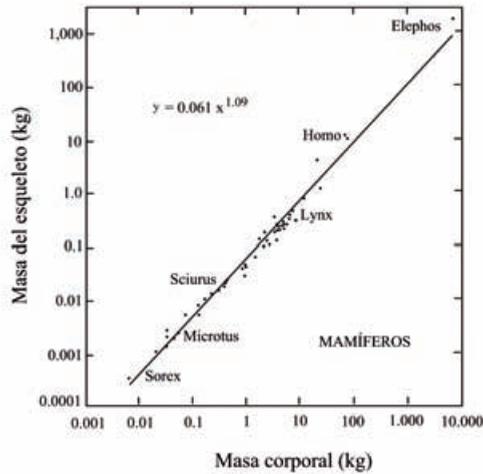


Fig. 6.14. Masa del esqueleto en función de la masa corporal para mamíferos. Prange *et al.* (1979).

Nótese que en la figura 6.14, el coeficiente de la relación alométrica es 0,061 y no 0,09 como en la expresión (6.24). La razón es que los datos de la figura se obtuvieron a partir de huesos secos de colecciones de museos. Los estudios hechos comparando el peso de los huesos frescos (en el animal vivo) y secos llevan a la conclusión de que, de forma general, el peso de los huesos secos debe ser incrementado en un 50 por ciento para obtener el de los huesos frescos.

En cuanto a las aves, es conocido el hecho de que los huesos de las alas son huecos y, por lo tanto, más ligeros que los de las extremidades de animales terrestres del mismo tamaño. Pero lo que es menos conocido es que los huesos de las patas son más robustos al tener que absorber el impacto al aterrizar en el suelo, resultando en una masa del esqueleto del mismo orden que la de los mamíferos. En efecto, las medidas realizadas dan la siguiente ley de escala para las aves:

$$M_{esq}(aves) \approx 0,10M^{1,07}$$

prácticamente indistinguible de la expresión anterior para mamíferos.

En el caso de los mamíferos acuáticos y los peces, la información disponible es muy modesta, de forma que los ajustes realizados tienen menos solidez que en el caso de los mamíferos terrestres, pero la conclusión que parece desprenderse de los datos es que el exponente de la relación alométrica es próximo a 1, es decir, la masa del esqueleto varía proporcionalmente a la masa del cuerpo y no se hace más robusto, lo cual es bastante lógico dado que en el agua no necesitan soportar el peso del animal y que no hay fuerzas de

impacto asociadas a la locomoción. Por ejemplo, en el caso de las ballenas, teniendo en cuenta únicamente especímenes adultos, la relación entre masa del esqueleto y masa corporal es:

$$M_{esq} (\text{mamíferos acuáticos}) \approx 0,11 M^{1,02}$$

muy próxima a la proporcionalidad. En el caso de los peces, la relación entre ambas masas es también próxima a la proporcionalidad y, además, el coeficiente k es claramente menor que en los mamíferos.

6.5 La carga, el salto y la carrera

Consideremos ahora algunas características que dependen de la fuerza muscular. Ya vimos en el capítulo 2 que la fuerza por unidad de sección que es capaz de desarrollar el músculo esquelético de un animal es, para casi todos ellos, constante e igual a unos 300 kN/m^2 . La fuerza total depende, por lo tanto, de la sección transversal del músculo.

6.5.1 Fuerza relativa de un animal

Llamamos fuerza relativa de un animal al peso que puede levantar por la acción de sus músculos dividido por su propio peso. El peso máximo que se puede sostener contra la gravedad terrestre depende de la fuerza muscular y ésta de la sección total de los músculos que intervienen en dicha acción, mientras que el propio peso del animal es proporcional a su volumen. Si d es el diámetro muscular y V el volumen total, la fuerza relativa f será:

$$f \propto \frac{d^2}{V} \propto \frac{d^2}{d^2 l} = \frac{1}{l}$$

Consideremos ahora dos animales semejantes pero de diferente tamaño, tales que la relación entre las dimensiones lineales sea k :

$$L_2 = kL_1$$

La razón entre las fuerzas relativas de ambos será:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{d_2^2 \times V_1}{d_1^2 \times V_2} = \frac{k^2 \times d_1^2 \times V_1}{d_1^2 \times k^3 \times V_1} = \frac{1}{k}$$

donde se ha utilizado la relación $V_2 = k^3 V_1$. Una hormiga tiene una fuerza relativa del orden de 3, es decir, es capaz de cargar un peso hasta tres veces superior al suyo propio y, por esta razón, se le considera un animal especialmente fuerte. Consideremos una hormiga de longitud igual a 1 cm

aproximadamente y un animal con la misma forma de la hormiga pero del tamaño de un elefante, es decir, de unos 4 metros de longitud. La razón isométrica será:

$$k = \frac{L_2}{L_1} = \frac{4}{0,01} = 400$$

y su fuerza relativa resulta:

$$f_2 = \frac{f_1}{k} = \frac{3}{400} = 0,0075$$

Es decir, este hipotético animal no podría levantar un peso ni siquiera equivalente al 1 por ciento del suyo propio. La forma de una hormiga corresponde, por lo tanto, a la de un animal muy débil para la carga, aunque su pequeño tamaño hace que su fuerza relativa sea grande. Si imaginamos una hormiga con las dimensiones de un elefante, enseguida nos damos cuenta de su debilidad. Un elefante real puede cargar hasta un 25 por ciento de su peso:

$$f_2 = 0,25$$

Para conseguir llegar a este valor, los miembros del elefante tienen que ser mucho más gruesos con relación al conjunto del cuerpo que los de la hormiga. Veamos cuánto más gruesos. El grosor de la pata de una hormiga es del orden de 0,1 mm, por lo que un elefante con las mismas proporciones que una hormiga tendría patas de $400 \times 0,01 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$ de grosor, mucho más delgadas que las de los elefantes reales. Para conseguir la fuerza relativa real, el cociente entre los diámetros de las extremidades debe satisfacer la ecuación:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{0,25}{3} = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^3 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \frac{1}{(400)^3}$$

de donde:

$$\frac{d_2}{d_1} \simeq 2.300$$

lo que nos da un diámetro $d_2 = 2.300 \times d_1 = 23 \text{ cm}$, más próximo a su valor real, es decir, unas extremidades unas 6 veces más gruesas que las de una hormiga de su tamaño. **Contrariamente a la opinión popular, un elefante es mucho más fuerte, relativamente a sus dimensiones, que una hormiga**, aunque su gran volumen hace que la fuerza relativa sea menor.

***Ejemplo.** Sabiendo que la fuerza relativa de un elefante es 0,25 puede calcularse la fuerza relativa de un animal con forma de elefante pero del*

tamaño de una hormiga. Como la relación entre las dimensiones lineales es 400, tenemos:

$$f_1 = k \times f_2 = 400 \times 0,25 \approx 100$$

Es decir, un animal de esas características ¿podría levantar un peso 100 veces superior al suyo!

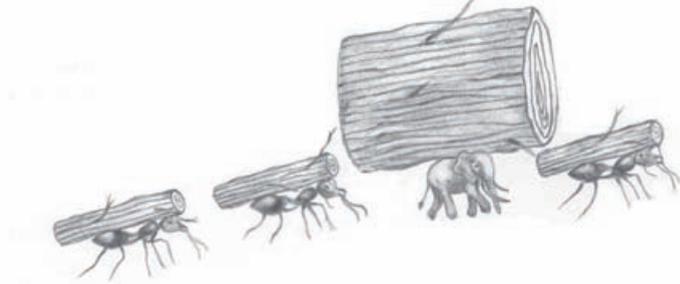


Fig. 6.15. Fuerza relativa de dos animales con el mismo tamaño (el de una hormiga) pero con formas distintas (de elefante y de hormiga).

6.5.2 El salto

En el salto en vertical un animal se da impulso con las patas saltadoras a lo largo de un cierto recorrido s proporcional a la longitud l de éstas. En el salto en carrera hay, además de este impulso, una transformación de energía cinética en energía elástica en los tendones y ligamentos que incrementa la altura a la que puede ascenderse, pero cuando se salta a partir de una posición estática, el único mecanismo que puede utilizarse es la fuerza muscular, F_{musc} , contra el suelo para extender las extremidades previamente contraídas. El trabajo realizado por dicha fuerza muscular, W , se transforma en la energía cinética que adquiere el cuerpo del animal en el momento de despegar del suelo. Por lo tanto, debe cumplirse:

$$\frac{1}{2} Mv^2 = W = F_{musc} \times s \propto F_{musc} \times l \quad (6.26)$$

Ahora bien, la fuerza es proporcional a la sección transversal S del músculo que interviene en el salto:

$$F_{musc} \times l \propto S \times l \propto V_{músc} \propto M_{músc} = \mu M \quad (6.27)$$

donde μ es la fracción de la masa corporal M que corresponde a los músculos de las extremidades saltadoras. Llamando α al trabajo hecho por unidad de masa muscular en una contracción y sustituyendo en la ecuación (6.26), obtenemos:

$$\frac{1}{2}Mv^2 = W = \alpha M_{musc} = \alpha\mu M$$

$$v = \sqrt{2\alpha\mu}$$

y la altura alcanzada, prescindiendo del rozamiento con el aire, tal y como vimos en el capítulo 1, será:

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{\alpha\mu}{g} \quad (6.28)$$

donde g es la aceleración de la gravedad.

La altura alcanzada no depende, por lo tanto, de la masa total del cuerpo, sino sólo de la fracción de ésta, que corresponde a los músculos que intervienen en el salto. En animales similares, por ejemplo canguros de diferentes tamaños, o ranas de diferentes tamaños, dicha fracción μ es la misma y, como el trabajo por unidad de masa muscular depende de la estructura de las sarcómeras y los puentes entre filamentos, que son prácticamente iguales para todos ellos, resulta que animales de muy distinto tamaño pero de forma parecida saltan, efectivamente, la misma altura.

Esta sorprendente conclusión, a la que ya hicimos referencia en el primer capítulo, se verifica experimentalmente con bastante exactitud. Más aún, los músculos saltadores suponen una fracción de la masa corporal que no varía demasiado de unos animales a otros, lo que implica que la altura a la que pueden llegar los animales al saltar tampoco varía demasiado. Por eso se entiende que una pulga de 1 mm de tamaño sea capaz de saltar unos 20 cm en vacío, tan sólo una tercera parte de lo que alcanza una persona, de 1,70 m de altura y con una masa unas 100 millones de veces superior. En el caso de la pulga el salto supone 200 veces su propio tamaño mientras que en una persona es del orden de un tercio de su propia altura. Ya hemos visto que animales como el gálago alcanzan alturas de hasta 2 metros, lo que se debe esencialmente a que poseen patas con músculos que equivalen a una fracción desproporcionadamente alta de su masa corporal, como puede verse en la figura 6.16.



Fig. 6.16. *Galago senegalensis* con una cría. Nótese la robustez de sus extremidades posteriores en relación con las dimensiones del cuerpo, lo que le permite alcanzar enormes alturas en el salto vertical.

Estimemos lo que puede llegar a saltar una persona que, como hemos visto, es representativo de lo que pueden hacer otros muchos animales. Según vimos, el trabajo medio por unidad de masa muscular en una contracción es de unos 60 J/kg . Por otra parte, la masa de las dos piernas es del orden del 30 por ciento de la masa corporal y los músculos suponen el 40 por ciento de dicha masa, lo que da un valor del 12 por ciento para dichos músculos. Si interviene el 70 por ciento de esos músculos en el salto, el parámetro μ será igual a $0,12 \times 0,70 = 0,084$. Por lo tanto:

$$h \approx \frac{60 \times 0,084}{9,8} = 0,51 \text{ m}$$

que es el orden de magnitud de la altura máxima alcanzada en el salto vertical por una persona sin entrenamiento especial.

Como puede verse en la expresión (6.28), los parámetros que pueden influir en la altura del salto, α y μ , dependen de la morfología de cada animal. El trabajo por unidad de masa muscular puede aumentarse aumentando la longitud de contracción muscular, pero es seguramente la fracción de la masa corporal que corresponde a los músculos usados en el salto el factor que admite mayor variación. Para muchos animales la habilidad para el salto resulta crucial para defenderse de los predadores o para capturar sus presas. En estos casos, es ventajoso que μ sea grande, pero su valor tiene un límite impuesto por el gasto metabólico necesario para mantenerlos en actividad y la

necesidad de que existan otros órganos en el cuerpo capaces de proporcionar la energía necesaria para realizar las funciones vitales, incluida la locomoción y el salto. De ahí que no pueda crecer demasiado, aunque en los gálagos, por ejemplo, es notablemente mayor que en los humanos. En el caso de animales muy pequeños, como la pulga, ya vimos en el primer capítulo que existe una limitación adicional debido a que no es posible contraer los músculos con la rapidez requerida, lo que se contrarresta parcialmente con elementos elásticos que son capaces de dispararse como muelles a gran velocidad.

Puede refinarse este análisis teniendo en cuenta que, dejando aparte casos excepcionales como el de los gálagos, el parámetro μ aumenta ligeramente con la masa corporal, lo que implica que la velocidad de despegue depende de dicha masa. Los estudios cuantitativos en insectos muestran, efectivamente, una dependencia alométrica del tipo:

$$v \propto M^{0,05} \quad (6.29)$$

$$h = \frac{v^2}{2g} \propto M^{0,1} \quad (6.30)$$

con un exponente, como se ve, muy pequeño, cercano al valor $a = 0$, que daría un valor estrictamente constante de la velocidad de despegue. Por lo tanto, aun con un análisis más preciso, **puede concluirse que la altura que alcanzan animales de la misma estructura corporal es prácticamente constante, independiente de su masa.**

6.5.3 La carrera

El coste energético de desplazarse

Nos interesaremos ahora por la velocidad con que pueden moverse los animales y la dependencia con la masa corporal. Empezaremos considerando animales con la misma forma que sólo se diferencian en el tamaño, aunque veremos que las relaciones obtenidas pueden generalizarse. Para recorrer una cierta distancia L , por ejemplo un metro o un kilómetro, un animal debe dar un número de pasos, tal que su producto por la longitud de cada paso sea igual a la distancia considerada. Por lo tanto, el número de pasos n que hay que dar para recorrer la unidad de distancia será inversamente proporcional a la longitud de cada paso l_{paso} , que es, a su vez, proporcional a la longitud de la extremidad l :

$$n = \frac{1}{l_{\text{paso}}} \propto \frac{1}{l} \propto M^{-0,33} \quad (6.31)$$

donde hemos tenido en cuenta que la longitud de las extremidades, que es una dimensión lineal, es proporcional al volumen (y por lo tanto a la masa) elevado a $1/3$. Aunque esta relación isométrica es sólo cierta para animales semejantes, lo cierto es que se cumple experimentalmente para animales de formas muy diversas. Así, para todos los mamíferos, incluyendo insectívoros, primates, roedores y otros, el exponente de la relación de escala entre la longitud de las patas y la masa corporal es de este orden, mientras que en los bóvidos se aproxima más a 0,25, como vimos anteriormente.

Ya sabemos, por otra parte, que el trabajo muscular W realizado en un paso es proporcional a la masa del músculo y ésta, a su vez, proporcional a la masa total del cuerpo. El trabajo realizado en recorrer la unidad de distancia, W/L , será, por lo tanto, igual al trabajo hecho en cada paso (proporcional a la masa corporal) multiplicado por el número de pasos necesarios para cubrir dicha unidad de distancia:

$$\frac{W}{L} \propto M \times n \propto M \times M^{-0,33} = M^{0,67} \quad (6.32)$$

y si consideramos el trabajo realizado por unidad de longitud y por unidad de masa, tendremos:

$$\frac{W}{LM} \propto M^{-0,33} \quad (6.33)$$

lo que implica que la cantidad de trabajo requerido para mover un kilogramo de masa corporal a lo largo de un kilómetro es menor cuanto mayor sea la masa total, según muestra la ecuación (6.33), aunque la cantidad absoluta de trabajo, igual a la de energía consumida, para mover todo el cuerpo aumenta con la masa de éste como muestra la ecuación (6.32).

Este trabajo se desarrollará a un ritmo que dependerá de la velocidad a la que se mueva el animal. Experimentalmente se ha medido la cantidad de oxígeno consumida por distintos animales, por unidad de masa y de tiempo, en función de la velocidad a la que se desplazan. Recordemos del capítulo 5 que consumir 1 litro de O_2 es equivalente a gastar 20.000 J , o lo que es lo mismo:

$$1 \text{ ml}O_2 \Leftrightarrow 20 \text{ J} \quad (6.34)$$

El resultado de las observaciones está resumido en la figura 6.17, en la que se representa dicho gasto de energía en función de la velocidad para un conjunto de mamíferos con masas que difieren hasta en un factor mil. Obsérvese que la pendiente de cada recta es, justamente, la energía por

unidad de masa corporal y de distancia, ya que es igual al cociente de ordenadas por abscisas:

$$pendiente = \frac{W / (M \times \Delta t)}{L / \Delta t} = \frac{W}{LM}$$

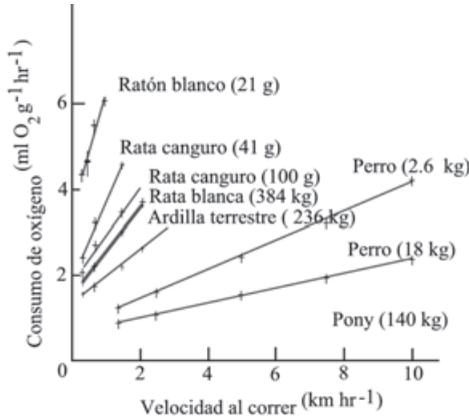


Fig. 6.17. Consumo de oxígeno en función de la velocidad de desplazamiento para algunos mamíferos de distintos tamaños. Taylor *et al.* (1970).

Observación. La pendiente obtenida directamente del gráfico puede expresarse en unidades del SI del siguiente modo:

$$1 \frac{mlO_2 / (g \times hora)}{km / hora} = 1 mlO_2 / (g \times km) = \frac{20}{10^{-3} \times 10^3} J / (kg \times m) = 20 J / (kg \times m)$$

Lo que se observa en el gráfico es que la pendiente, es decir, el consumo energético por unidad de masa corporal y unidad de distancia, se hace cada vez más pequeño al aumentar la masa total del animal, y se ajusta aproximadamente a la relación de escala (6.33) con el exponente $-0,33$. Nótese que las rectas de la figura representan la potencia metabólica (energía consumida por unidad de tiempo) necesaria para moverse, P_{mov} , a una cierta velocidad v , por unidad de masa y, dado que la pendiente es proporcional a $M^{-0,33}$, resulta:

$$\frac{P_{mov}}{M} \propto M^{-0,33} \times v$$

$$P_{mov} \propto M^{0,67} \times v$$

Se han realizado también medidas directas del gasto energético por unidad de masa corporal y distancia recorrida, resumidas en la tabla 6.3, que muestran que, efectivamente, el gasto energético por unidad de masa y de longitud recorrida se ajusta bien a una dependencia en $M^{-0,33}$, pero no sólo

para mamíferos, sino para una clase muy amplia de animales terrestres, que comprende aves, reptiles e, incluso, hormigas.

Tabla 6.3. Coste energético del desplazamiento en función de la masa corporal		
Fuente	Número de especies	Coste energético $lO_2 / (kg \times km)$
Paladino y King (1979)	52 mamíferos, aves y reptiles	$0,55 \times M^{-0,32}$
Fedak y Seeherman (1979)	69 mamíferos, aves y reptiles	$0,56 \times M^{-0,28}$
Jensen y Holm-Jensen (1980)	72 mamíferos, aves, reptiles y hormigas	$0,76 \times M^{-0,35}$
Taylor <i>et al.</i> (1982)	62 mamíferos y aves	$0,53 \times M^{-0,32}$

Es interesante observar que el parámetro k en la expresión:

$$\frac{W}{LM} = kM^a$$

es muy parecido en todos ellos, lo que implica que un animal de un peso dado, por ejemplo un kilogramo, consume la misma cantidad de energía, independientemente de la velocidad, para desplazarse por tierra una cierta distancia, sea de la clase que sea, en particular, sea bípedo o cuadrúpedo, mamífero, ave o reptil, como puede verse en la tabla 6.3. Esto parece indicar que todos ellos han evolucionado hasta alcanzar **el grado óptimo de gasto energético por unidad de masa y de longitud recorrida necesario para moverse**, determinado por la capacidad de los músculos para producir trabajo, aproximadamente la misma para todos. Todo lo demás, la estructura de las extremidades, el modo de locomoción, la forma del cuerpo, etc., es secundario.

Nótese que lo que se mide en estos experimentos es el consumo de energía total. No sólo el que se destina a la función muscular sino también el asociado al resto de las funciones vitales. Por eso en la figura 6.17 las rectas que dan la potencia metabólica en función de la velocidad no pasan por el origen; también cuando $v = 0$ es preciso gastar energía. Experimentalmente, el término correspondiente a $v = 0$ es superior a la potencia metabólica basal, porque corresponde a la tasa metabólica en reposo pero en estado de vigilia y en posición de marcha. Tomaremos, en lo que sigue, dicho término igual a la tasa metabólica en reposo multiplicada por 1,5, que es un valor promedio medido para una gran cantidad de grupos de animales. La potencia metabólica

total en función de la velocidad, para un animal dado, tendrá, por lo tanto, la siguiente forma:

$$P = A_1 + A_2 v \quad (6.35)$$

donde A_1 y A_2 son dos constantes cuyo valor es distinto para cada grupo de animales.

En el capítulo siguiente veremos que la potencia metabólica en reposo también satisface una ley de escala con un exponente $a = 0,75$, de forma que la expresión (6.34) puede ahora generalizarse para grandes grupos de animales de diferente masa y escribirse como:

$$P = k_1 M^{0,75} + k_2 M^{0,67} v \quad (6.36)$$

$$\frac{P}{M} = k_1 M^{-0,25} + k_2 M^{-0,33} v \quad (6.37)$$

De la tabla 6.3 se sigue que el parámetro k_2 en las ecuaciones (6.36-37) toma el valor:

$$k_2 \simeq (0,53 \sim 0,76) lO_2 / (kg \times km)$$

con la masa expresada en kilogramos. Cambiando ahora a unidades de SI:

$$k_2 \simeq (0,53 \sim 0,76) lO_2 / (kg \times km)^{-1} \times \frac{20.000 J / lO_2}{1.000 m / km} \simeq (11-15) J / (kg \times m) \quad (6.38)$$

o, de forma equivalente:

$$k_2 = (11 - 15) W/kg \times (m/s)^{-1}$$

Observación. Para una persona de 70 kg, la expresión (6.35) muestra que la potencia metabólica total, cuando se mueve a la velocidad de 1 m/s, es igual a la potencia en reposo, que es del orden de 80 W, multiplicada por 1,5, más el término proporcional a la velocidad. Tomando un valor para $k_2 = 11 W/kg \times (m/s)^{-1}$, resulta:

$$P \simeq 80 \times 1,5 + 11 \times 70^{0,67} \times 1 = 310 W$$

que es un valor que se ajusta a la tabla de potencias metabólicas del capítulo precedente.

Otra cosa distinta sucede cuando consideramos la locomoción acuática y la aérea. Los animales acuáticos tienen una densidad parecida a la del agua, es decir, una flotabilidad neutra, y no necesitan gastar energía para mantener la posición. Sin embargo, deben vencer la resistencia del agua al movimiento debida a la fricción y a las turbulencias, por lo que han desarrollado formas fusiformes, muy parecidas en todos los organismos acuáticos, que minimizan

dicha resistencia. El coste energético del desplazamiento en el agua es, por lo tanto, menor que para el desplazamiento terrestre, en un factor próximo a 10, y la dependencia con la masa tiene un exponente menor, del orden de $a = 0,25$. Empíricamente se ha comprobado que para los peces:

$$\frac{W}{LM} (\text{acuáticos}) \simeq 1,4 \times M^{-0,25} J/(kg \times m)$$

donde se puede comprobar que el coeficiente de la relación alométrica es unas diez veces inferior al de la relación equivalente para animales terrestres, que, de acuerdo con la expresión (6.38), es del orden de 11-15 $J/(kg \times m)$.

En lo que se refiere a los animales voladores, es mucho más difícil obtener datos precisos. Además, las formas de vuelo son muy variadas, combinando el planeo, la suspensión y diversas clases de aleteo. Aun así se han hecho algunos estudios empíricos sobre el coste energético de volar y el resultado, incluyendo aves, murciélagos e insectos, es intermedio entre la locomoción terrestre y la acuática, siendo la dependencia con la masa similar a la de los peces. En realidad, la potencia desarrollada por los animales voladores para desplazarse es parecida a la de los que se mueven sobre tierra. Al contrario que en el agua, en el aire es preciso mantenerse mediante un esfuerzo continuado, utilizando la superficie de las alas y las corrientes creadas por el movimiento de éstas para generar la fuerza de sustentación necesaria, tal como veremos en el capítulo 14. Pero la velocidad de vuelo que optimiza el esfuerzo de locomoción en aire es siempre superior a la de la carrera para animales de tamaño semejante, por lo que es inmediato entender que **el coste energético por unidad de distancia recorrida es menor en los que vuelan que en los que se desplazan sobre tierra, ya que necesitan un intervalo de tiempo menor (y, por lo tanto, una cantidad de energía menor a potencia constante) para recorrer la misma distancia.** El resultado promedio es:

$$\frac{W}{LM} (\text{voladores}) \simeq 5,4 \times M^{-0,23} J / (kg \times m) \quad (6.39)$$

donde, al igual que en los casos anteriores, la masa M se expresa en kilogramos. Como vemos en la expresión (6.39), la energía consumida por unidad de masa y distancia en las aves es del orden de la mitad de la consumida por los animales de locomoción terrestre.

Todos los datos sobre el coste energético del desplazamiento se encuentran resumidos en el gráfico de la figura 6.18. Puede verse que, debido a la diferencia en los exponentes que regulan la variación del consumo energético en función de la masa, **volar resulta más económico que moverse en tierra**

para masas pequeñas, pero a partir de una masa del orden de los 3 a 10 kg el vuelo se hace más costoso, por lo que las grandes aves ya no son voladoras, o bien se apoyan sobre todo en el planeo a favor de columnas de aire ascendente. Una de las aves más grandes capaces de volar es la avutarda de Kori (*Ardeotis kori*), que puede llegar a pesar unos 13 kg y que sólo vuela ocasionalmente distancias cortas, lo que parece indicar que hay un tamaño máximo para animales voladores alrededor del punto de cruce de las dos líneas de coste energético. Mantenerse suspendido en el aire como un helicóptero requiere de un intenso aleteo y su coste energético es mucho mayor que el del vuelo normal, por lo que sólo los pájaros más pequeños, como el colibrí, que pesa unos 3 g, y la mayoría de los insectos voladores, pueden conseguirlo.

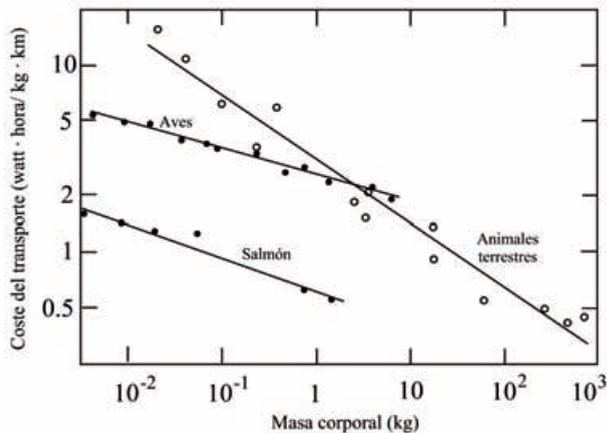


Fig. 6.18. Coste de desplazamiento en función de la masa corporal medido como la energía consumida por kilogramo de masa y por kilómetro recorrido para animales que corren, vuelan y nadan. Greenewalt (1977).

Por otro lado, también llegarán a cruzarse las líneas que describen el coste energético de moverse en el agua y sobre tierra, de forma que, por razones puramente energéticas, a partir de una cierta masa sería más económica la locomoción terrestre, pero en este caso empiezan a aparecer otros factores que hacen imposible la vida en tierra para grandes tamaños corporales, esencialmente la necesidad de sostenerse en la gravedad terrestre y resistir las tensiones y los impactos durante el movimiento, como hemos visto, y también, como veremos en el capítulo siguiente, la dificultad para evacuar el calor generado en el metabolismo. En cualquier caso, el cruce se produciría para valores gigantescos de la masa. Así, para todo el intervalo posible de masas corporales, **el movimiento en el agua es más económico que en tierra firme.**

Ejemplo. Puede encontrarse la masa corporal a partir de la cual, por razones puramente energéticas, sería más económico moverse en tierra que en el agua, que es el punto de cruce de las líneas asociadas al consumo energético en ambos medios:

$$1,4 \times M^{-0,25} = 11 \times M^{-0,33}$$

$$M = \left(\frac{11}{1,4} \right)^{\frac{1}{0,08}} \approx 10^{11} \text{ kg} = 10^8 \text{ T}$$

Una consecuencia general de este apartado es que aumentar de tamaño reduce el coste energético de la locomoción por unidad de masa y distancia, lo que podría ser una de las razones de la tendencia evolutiva a dicho aumento.

Subir pendientes

En el movimiento sobre una superficie plana ya vimos que el gasto energético tiene como finalidad mover pendularmente las extremidades mientras el conjunto del cuerpo se desplaza a velocidad constante, permitir la oscilación del centro de masas y cubrir las pérdidas de energía en los contactos con el suelo. Cuando se sube una cuesta se produce, además, un incremento en la energía potencial del cuerpo que es proporcional a la masa y a la altura subida:

$$U = Mgh$$

Elevar 1 kg a 1 m de altura cuesta $9,8 \text{ J}$ de energía mecánica, lo que, teniendo en cuenta un rendimiento muscular del orden del 25 por ciento, equivale a un gasto energético de unos 40 J , es decir, 2 ml de O_2 . La energía gastada por unidad de masa corporal para desplazarse horizontalmente una cierta distancia disminuye como $M^{-0,33}$, mientras que en vertical es constante ($\frac{U}{M} = gh$). Por otro lado, la tasa metabólica en reposo por unidad de masa también disminuye como $M^{-0,25}$, lo que implica que, según se hace más grande un animal, más le cuesta, relativamente a la cantidad de energía de la que dispone, aumentar su energía potencial al subir una pendiente. Si P_{vert} es la potencia necesaria para ascender una cuesta con una componente vertical de la velocidad igual a v_z , tendremos

$$P_{\text{vert}} = 4 \times \frac{d(Mgh)}{dt} = 4Mgv_z \simeq 40Mv_z \quad (6.40)$$

donde P_{vert} resulta en vatios si la masa se expresa en kilogramos y la velocidad en m/s . El factor 4 viene del hecho de que es necesario consumir una cantidad de energía unas cuatro veces mayor que la energía mecánica producida de

forma efectiva por los músculos. Si P_B es la tasa metabólica en reposo, o basal, veremos en el capítulo siguiente que para los mamíferos se ajusta a una expresión del tipo:

$$P_B = 3,4M^{0,75}$$

en vatios, con la masa expresada en kilogramos. Así, la relación entre ambas es:

$$\frac{P_{vert}}{P_B} = \frac{4gv_z}{3,4} M^{0,25} = 11,5M^{0,25}v_z \quad (6.41)$$

Podemos comparar también la potencia necesaria para moverse en vertical con la que encontramos en la sección anterior para el movimiento en horizontal:

$$\frac{P_{vert}}{P_{hor}} = \frac{4Mgv_z}{11M^{0,67}v_{hor}} = 3,6M^{0,33} \frac{v_z}{v_{hor}} \quad (6.42)$$

Si consideramos la ascensión por una cuesta del 15 por ciento de pendiente, a una velocidad de unos 5 km/h, la componente vertical de la velocidad, v_z , resulta ser de 0,21 m/s. Los resultados de los dos cocientes que aparecen en las expresiones (6.41-42) para animales de diferentes masas pueden verse en la tabla 6.4.

Tabla 6.4. Potencia relativa necesaria para subir una pendiente			
Animal	Masa corporal	$\frac{P_{vert}}{P_B}$	$\frac{P_{vert}}{P_{hor}}$
ratón	10 g	0,76	0,12
ardilla	100 g	1,4	0,25
persona	70 kg	7,0	2,1
caballo	600 kg	12	4,4
elefante	5.000 kg	20	8,9

Para un ratón de 10 g de masa y para una ardilla de 100 g, el aumento de potencia metabólica para ascender la pendiente es menor o del orden de la necesaria para mantenerse en actividad normal y, por lo tanto, inapreciable.

Por el contrario, para una persona de 70 kg, para un caballo de 600 kg y para un elefante de 5 toneladas, la potencia metabólica necesaria para ascender una pendiente moderada es ya muy superior a la tasa metabólica en actividad normal y a la necesaria para moverse en horizontal. Así, para un animal de pequeño tamaño, como un ratón o una ardilla, el trabajo necesario para ascender una cierta altura es una fracción pequeña de la energía total consumida y no hay mucha diferencia entre moverse sobre un plano o subiendo, lo que les permite trepar verticalmente con facilidad. Por el contrario, para un animal de gran tamaño, la energía necesaria para elevar su cuerpo a lo largo de una pendiente supone un incremento enorme de la energía que debe consumir y de ahí las dificultades que tienen animales como vacas, caballos o elefantes para desplazarse sobre pendientes.

6.6 Ejercicios propuestos

Ejercicio 6.1 *Lord Rayleigh, en 1915, imaginó las estrellas como esferas líquidas oscilantes que se mantenían como cuerpos compactos por la propia atracción gravitatoria de la materia que las conforma. Los parámetros esenciales son, en este contexto, la masa, el radio y la constante de Newton G. Encontrar, mediante el análisis dimensional, la dependencia con estos parámetros de la frecuencia de vibración de dichos cuerpos.*

$$\text{Sol.: } v = k' \sqrt{G \frac{M}{V}} = k' \sqrt{G\rho}$$

Es decir, la frecuencia de vibración no depende separadamente de la masa y el radio de la estrella, sino sólo de la densidad.

Ejercicio 6.2 *En el contexto de las teorías que buscan integrar la Relatividad y la Física Cuántica, existen tres constantes universales básicas que son la velocidad de la luz c , la constante de Newton G y la constante de Planck \hbar , cuyo significado veremos en el capítulo 23 al introducir algunas nociones de Física Atómica y Nuclear. El valor de \hbar es de $1,05 \times 10^{-34}$ Js, es decir, tiene dimensiones de momento angular, ML^2T^{-1} . Existen, en este contexto, una longitud y un tiempo función de estas constantes, llamadas longitud y tiempo de Planck, cuyo valor debe poseer un significado fundamental. Encontrar la expresión genérica de estos parámetros y su valor aproximado tomando la constante sin dimensiones que aparece en ambas expresiones igual a 1.*

$$\text{Sol.: } l_{\text{Planck}} = k \left(\frac{G\hbar}{c^3} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 10^{-35} \text{ m}; t_{\text{Planck}} = \frac{L_P}{c} \approx 10^{-43} \text{ s}$$

A la increíblemente pequeña distancia l_{planck} , las interacciones entre partículas elementales sólo podrán describirse mediante teorías, todavía no descubiertas, que unifiquen la Relatividad y la Física Cuántica; y entre el Big Bang, que representa el momento inicial en la historia del Universo, y t_{planck} resulta imposible entender, mientras no dispongamos de dichas teorías, los fenómenos físicos que tuvieron lugar en ese intervalo de tiempo.

Ejercicio 6.3 Encontrar la relación entre superficie y volumen de un cilindro cuya base tiene radio R y de altura h . Encontrar los límites en el caso de una moneda de espesor cero ($h \rightarrow 0$) y de un cilindro muy alargado que tiende a un hilo ($h \rightarrow \infty$).

$$\text{Sol.: } S = 2,93 \frac{1+z}{z^{0,67}} V^{0,67}, \text{ siendo } z = \frac{h}{R}$$

Cuando $h \rightarrow 0$, $S/V^{0,67} \rightarrow \infty$ (el volumen tiende a cero pero no la superficie)

Cuando $h \rightarrow \infty$, $S/V^{0,67} \rightarrow \infty$ (la superficie y el volumen tienden a cero, pero el volumen lo hace más rápidamente)

Ejercicio 6.4 Considérese una serpiente cuya forma aproximada es un cilindro de un metro de largo con una sección de dos centímetro de radio. Encontrar la relación entre la superficie y el volumen.

$$\text{Sol.: } S \approx 11 \times V^{0,67}$$

Ejercicio 6.5 Para el caso de un cilindro, encontrar la relación entre altura y radio (el valor de z) que minimiza la relación $S/V^{0,67}$.

$$\text{Sol.: } z = 2, \text{ es decir, } h = 2R$$

$$\text{Para este caso, } S = 5,54 \times V^{0,67}$$

Ejercicio 6.6 El área de un cono es $S = \pi R^2 + \pi Rl$, donde R es el radio de la base y l la longitud de la generatriz. El volumen es $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$, donde h es la altura. Teniendo en cuenta que $l^2 = R^2 + h^2$, calcular la relación entre superficie y volumen de un cono en función de la variable $z = \frac{h}{R}$ que sirve para caracterizar su forma.

$$\text{Sol.: } S = 3,05 \frac{1 + \sqrt{1+z^2}}{z^{\frac{2}{3}}} V^{\frac{2}{3}}$$

Lo mismo que en el caso del cilindro, cuando z tiende a cero (cono rechoncho que tiende a confundirse con su base) o a infinito (cono muy alargado que tiende a convertirse en un hilo), la constante $k = 3,05 \frac{1 + \sqrt{1 + z^2}}{z^{\frac{2}{3}}}$ tiende a infinito, debido a la rápida anulación del volumen en comparación con la superficie. Calcular el valor de z que minimiza k y el valor mínimo de k , es decir, la relación entre superficie y volumen para los conos tales que, para un volumen dado, su superficie es máxima.

Sol.: $z = 2\sqrt{2} \approx 2,83$; $S = 6,10 \times V^{0,67}$

Se comprueba, por lo tanto, que la constante k para un cono es superior a la del cilindro óptimo y, desde luego, a la de la esfera.

Ejercicio 6.7 Si un gato tiene una fuerza relativa igual a 1 y un tigre es similar pero tres veces más grande, calcular la fuerza relativa de este último.

Sol.: $f = 0,33$

Ejercicio 6.8 Un gálago es capaz de elevar su centro de masas 2 m en salto vertical. Suponiendo que sea capaz de contraer los músculos de forma que éstos desarrollan un trabajo de 100 J/kg, calcular la proporción de su masa corporal que corresponde a los músculos saltadores.

Sol.: 19,6 por ciento

Ejercicio 6.9 Calcular: a) la potencia metabólica que tiene que desarrollar un atleta de 60 kg que es capaz de correr la maratón (42,195 km) en 2 h y 15 min; b) la energía consumida en kilocalorías. Si en el resto del día en el que corre la carrera, su tasa metabólica es la media para una persona de ese peso (unos 120 W), calcular, c) el aporte de energía que tienen que tener los alimentos ingeridos ese día (tómese $k_2 = 11$ en la expresión (6.38)).

Sol.: a) $P \simeq 1000$ W; b) $E = 1.940$ kcal; c) $E = 4.190$ kcal

Ejercicio 6.10 Una liebre de 3 kg es capaz de correr en llano de forma sostenida a una velocidad de 10 m/s. Calcular: a) la potencia metabólica que tiene que desarrollar. Si asciende por una pendiente del 15 por ciento y desarrolla la misma potencia, calcular: b) la velocidad a la que se desplaza. Consideremos ahora un galgo de 20 kg. Calcular: c) la velocidad a que puede desplazarse en llano suponiendo que la relación de velocidades se ajusta a la expresión $v \propto M^{0,18}$ y d) la potencia metabólica que necesita desarrollar para moverse a esa velocidad en llano. Suponiendo que la potencia se mantiene constante, calcular, e) la velocidad a la que se desplaza el galgo por esa misma pendiente. (tómese $k_2 = 11$ en la expresión (6.38))

Sol.: a) $P_{liebre} = 240 \text{ W}$; b) $v_{liebre} = 5,6 \text{ m/s}$; c) $v_{galgo} = 13,8 \text{ m/s}$;
 d) $P_{galgo} = 1.180 \text{ W}$; e) $v_{galgo} = 5,6 \text{ m/s}$

6.7 Referencias

Alexander, R. McN. "Allometry in the limb bones of mammals from shrews (*Sorex*) to elephant (*Loxodonta*)". *J. Zool. Lond.* **189** (1979) 305

Alexander, R. McN. "Allometry in the leg muscles of mammals". *J. Zool. Lond.* **194** (1981) 539

Alexander, R. McN. *Locomotion in Animals*. Blackie, 1982

Alexander, R. McN. "Hovering and Jumping: Contrasting Problems in Scaling". En *Scaling in Biology*, editado por J. H. Brown y G. B. West, Oxford University Press, 2000

Biewener, A. A. "Bone strength in small mammals and bipedal birds: Do safety factors change with body size?". *J. Exp. Biol.* **98** (1982) 289

Biewener, A. A. "Locomotion stresses in the limb bones of two small mammals: the ground squirrel and chipmunk". *J. Exp. Biol.* **103** (1983) 131

Biewener, A. A. "Scaling Body Support in Mammals: Limb Posture and Muscle Mechanics". *Science* **245** (1989) 45

Biewener, A. A. "Biomechanics of mammalian terrestrial locomotion". *Science* **250** (1990) 1097

Biewener, A. A. "Scaling of Terrestrial Support: Differing Solutions to Mechanical Constraints of Size". En *Scaling in Biology*, editado por J. H. Brown y G. B. West, Oxford University Press, 2000

Brett, J. R. "The relation of size to rate of oxygen consumption and sustained swimming speed of sockeye salmon (*Oncorhynchus nerka*)". *J. Fish. Res. Bd. Canada* **22** (1965) 1491

Fedak, M. A. & Seeherman, H. J. "Reappraisal of energetics of locomotion shows identical cost in bipeds and quadrupeds including ostrich and horse". *Nature* **282** (1979) 713

Greenewalt, C. H. "The energetics of locomotion -Is small size really disadvantageous?". *Proc. of the Amer. Philosophical Society* **121** (1977) 100

Gregory, W. K. *Evolution emerging. A survey of changing patterns from primeval life to man*. MacMillan, 1951

- Hemmingsen, A. M. "Energy metabolism as related to body size and respiratory surfaces, and its evolution". *Reports of the Steno Memorial Hospital and Nordisk Insulin Laboratorium* **9** (1960) 6
- Jensen, T. F. & Holm-Jensen, I. "Energetic cost of running of workers of three ant species...". *J. Comp. Physiol.* **137** (1980) 151
- Lietzke, M. H. "Relation between Weight-Lifting Totals and Body Weight". *Science* **124** (1956) 486
- McMahon, T. "Size and Shape in Biology". *Science* **179** (1973) 1201
- McMahon, T. "Allometry in biomechanics: limb bones in adult ungulates". *American Naturalist* **109** (1975) 547
- McMahon, T. "The mechanical design of trees". *Scientific American* **233** (1975) 92
- McMahon, T. & Bonner, J. T. *Tamaño y Vida*. Labor, 1986
- Medawar, P. B. "Size, shape and age". En *Essays on growth and form presented to D'Arcy Thompson*. Oxford Clarendon Press, 1945.
- Paladino, F. V. & King, J. R. "Energetic cost of terrestrial locomotion: biped and quadruped runners compared". *Rev. Can. Biol.* **38** (1979) 321
- Prange, H. D. "The scaling and mechanics of arthropod exoskeletons". En *Scale effects in animal locomotion*. T. D. Pedley (ed.), Academic Press, 1977
- Prange, H. D. *et al.*: "Scaling of skeletal mass to body mass in birds and mammals". *American Naturalist* **113** (1979) 103
- Schmidt-Nielsen, K. *Scaling: Why is animal size so important?*. Cambridge University Press, 1984
- Taylor, C. R. *et al.* "Scaling of energetic cost of running to body size in mammals". *Amer. J. Physiol.* **219** (1970) 1104
- Taylor, C. R. "Running up and down hills: some consequences of size". *Science* **178** (1972) 1096
- Taylor, C. R. *et al.* "Energetics and mechanics of terrestrial locomotion. I. Metabolic energy consumption as a function of speed and body size in birds and mammals". *J. Exp. Biol.* **97** (1982) 1
- Thompson, D'Arcy W. *On Growth and Form*. Cambridge University Press, 1917

Capítulo 7. El metabolismo y las leyes de escala

Los seres vivos necesitan consumir energía para realizar todas sus funciones vitales: mantener activos sus órganos, impulsar los distintos fluidos corporales, mantener los potenciales celulares y las bombas iónicas de las membranas, moverse, etc. Esa energía la adquieren en forma de energía química contenida en los alimentos y liberada, principal aunque no únicamente, a través de procesos de oxidación. El metabolismo es el conjunto de procesos que sirven para transformar esa energía química en energía utilizable por el organismo, y **llamamos tasa o ritmo metabólico a la cantidad de energía por unidad de tiempo consumida por un organismo para poder atender a todas sus funciones, es decir, una cantidad con dimensiones de potencia**. Como ya vimos en el capítulo 5, una forma fácil de cuantificar la tasa metabólica es medir la cantidad de oxígeno consumido por unidad de tiempo puesto que la oxidación de hidratos de carbono y otras moléculas energéticas genera, en promedio, $20 J$ de energía por mililitro de O_2 consumido. La identificación entre tasa metabólica y el ritmo de consumo de oxígeno no es completamente exacta, ya que existen formas de metabolismo anaerobio en las que hay transformación de energía pero no consumo de oxígeno. No obstante, en todos los organismos pluricelulares y en la mayoría de los unicelulares el metabolismo es aerobio, es decir, basado en el consumo de oxígeno, excepto en momentos muy cortos de esfuerzo intenso. Así pues, para la inmensa mayoría de los seres vivos ambos conceptos son equivalentes y así los consideraremos.

En el caso de los organismos dotados de movimiento el ritmo metabólico cambia con su grado de actividad. Para el caso de que se encuentren en completo reposo, es decir, sin gasto alguno en mover el cuerpo ni tampoco en mantener el tono postural típico de la situación de actividad normal, la cantidad de energía consumida por unidad de tiempo se llama tasa metabólica basal o, mejor, por las razones expuestas en el capítulo 5, tasa metabólica en reposo. Esta tasa metabólica se mide para el animal en completo reposo,

en un entorno térmico neutral (mantener la temperatura corporal en un ambiente demasiado frío o demasiado caliente requiere un consumo de energía suplementario) y en un estado posabsortivo del animal (la digestión requiere también incrementar el ritmo metabólico). Cuando el animal se mueve, la tasa metabólica aumenta y puede llegar a superar un valor del orden de diez veces la tasa en reposo, mientras que a lo largo de una jornada el gasto de energía es un promedio entre los correspondientes al reposo y a los distintos niveles de actividad motora, denominándose, a veces, como tasa metabólica de campo. Llamamos tasa metabólica específica a la tasa metabólica por unidad de masa corporal, es decir, al consumo de energía por unidad de tiempo y de masa.

7.1 La ley de Kleiber

7.1.1 La regla de la superficie

Ya desde principios del siglo XIX, como consecuencia del establecimiento de la ley de la conservación de la energía, se sabía que debe haber una cierta relación entre el ritmo de consumo energético y la masa corporal. En efecto, la tasa metabólica se refleja en la velocidad con que se mueven órganos internos como el corazón y los pulmones, en el aporte de productos alimenticios a todas las células del organismo y, como veremos, al ritmo de toda la actividad vital, incluidos la reproducción y el envejecimiento. Así, si todos los animales tuvieran el mismo grado de actividad metabólica, es decir, mismo consumo energético por célula, mismo ritmo cardíaco, etc., la tasa metabólica específica (por unidad de masa) tendría que ser la misma o, lo que es equivalente, la tasa metabólica tendría que crecer de forma proporcional a la masa corporal. Por otra parte, toda la energía consumida, excepto una pequeña parte que se transforma en energía mecánica de desplazamiento, se disipa al entorno en forma de calor. Ahora bien, la velocidad de disipación, para tejidos orgánicos de propiedades similares, depende del área de la superficie corporal y ésta no varía proporcionalmente a la masa, sino, como sabemos del capítulo precedente, a $M^{0.67}$.

Así, a medida que los animales ganaran en tamaño tendrían cada vez más dificultades para disipar el calor generado y llegarían a asfixiarse. Desde luego, un cambio de forma que aumente la superficie corporal más rápidamente que la potencia $\frac{2}{3}$ de la masa tendería a aliviar el problema, pero para diferencias

enormes de masa como la existente entre un ratón y un elefante esta corrección no puede colmar la considerable diferencia entre generación y disipación

de calor. Por otra parte, el aumento relativo de superficie corporal para los animales pequeños implica una pérdida de calor más rápida y eficaz, lo que debe contrarrestarse con un metabolismo acelerado respecto de los animales grandes. Este razonamiento llevó, a mediados del siglo XIX, a formular una especie de regla, conocida como la regla de Bergmann, según la cual en los climas fríos los animales de sangre caliente tienden a ser de mayor tamaño que sus parientes próximos que viven en climas cálidos a fin de minimizar las pérdidas de calor. Una regla llena de excepciones, que ha suscitado grandes controversias.

La conclusión es que **la tasa metabólica en los animales, sea cual sea su especie, tiene que aumentar más lentamente que la masa, lo que implica que la tasa específica disminuye con la masa corporal**. Esta conclusión se verifica empíricamente con la simple observación de los ritmos vitales de un animal grande, vaca, caballo o elefante, con el de uno pequeño, ratón o ardilla. Todos los procesos fisiológicos y el ritmo con el que deben alimentarse los primeros son visiblemente más lentos que en los segundos, tal y como se concluye del simple argumento que relaciona consumo y disipación de energía. Lo más intuitivo es pensar que la tasa metabólica en reposo es proporcional a la superficie corporal, es decir:

$$P_B \propto M^{0,67}$$

$$\frac{P_B}{M} \propto M^{-0,33}$$

De esta forma, todos los animales tendrían la misma facilidad para disipar la energía consumida a cambio de que su metabolismo fuera considerablemente más lento a medida que su tamaño creciera.

7.1.2 La ley de Kleiber

Estimar la tasa metabólica basal de un animal es una tarea complicada que requiere, en primer lugar, medir el consumo de oxígeno y, en segundo lugar, definir las condiciones en las que debe hacerse; normalmente en completo reposo, en un entorno térmico neutral y en estado posabsortivo, lo que se consigue una vez transcurrido un lapso de tiempo después de la última comida, que debe ser tanto más prolongado cuanto más grande es el animal. A veces los investigadores extrapolan las mediciones realizadas en otras condiciones y obtienen así el valor de la tasa en reposo, pero hay, en todos los casos, una incertidumbre experimental que es preciso considerar. En 1932, Max Kleiber, un químico agrícola suizo que trabajaba

en la Universidad de California, en Davis, recopiló todos los datos existentes sobre ritmo metabólico en reposo de mamíferos, desde ratas de unos 150 g a venados de unos 700 kg (es decir, un intervalo en el que el valor más alto equivale a más de 4.000 veces el más bajo) y encontró una relación alométrica, pero no con un exponente igual a 0,67 como se espera de la regla de la superficie, sino igual a 0,75. Recuérdese que las relaciones alométricas se visualizan mejor en diagramas con escala logarítmica, por lo que la figura 7.1, que muestra la ley de Kleiber, y la mayoría de las contenidas en este capítulo son de ese tipo.

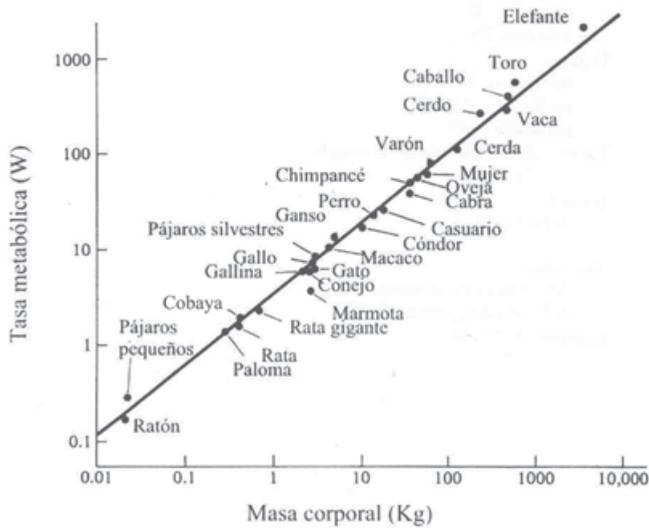


Fig. 7.1. Tasa metabólica en reposo para mamíferos y aves en un estudio experimental publicado poco después de que se formulase la ley de Kleiber. Benedict (1938), adaptada de Schmidt-Nielsen (1984).

El resultado que obtuvo es:

$$P_B \propto M^{0,74}$$

Y dadas las incertidumbres a que hemos hecho referencia, el mismo Kleiber pensó que el valor del exponente 0,74 era indistinguible, desde el punto de vista experimental, de 0,75, que es el valor aceptado y utilizado universalmente. A partir de ese momento se sucedieron las medidas sobre la tasa metabólica de multitud de organismos y los resultados confirmaron la llamada ley de Kleiber. Tan sólo seis años después de haberse publicado su primer artículo, ya se había ampliado la relación de datos hasta ratones de unos 10 gramos y elefantes de 5 toneladas, incluyendo aves, como puede verse en el gráfico de la figura 7.1. Se han estudiado también reptiles, peces,

plantas vasculares y microorganismos y, **en todos los casos, el exponente de la relación entre tasa metabólica en reposo y masa corporal es del orden de 0,75.**

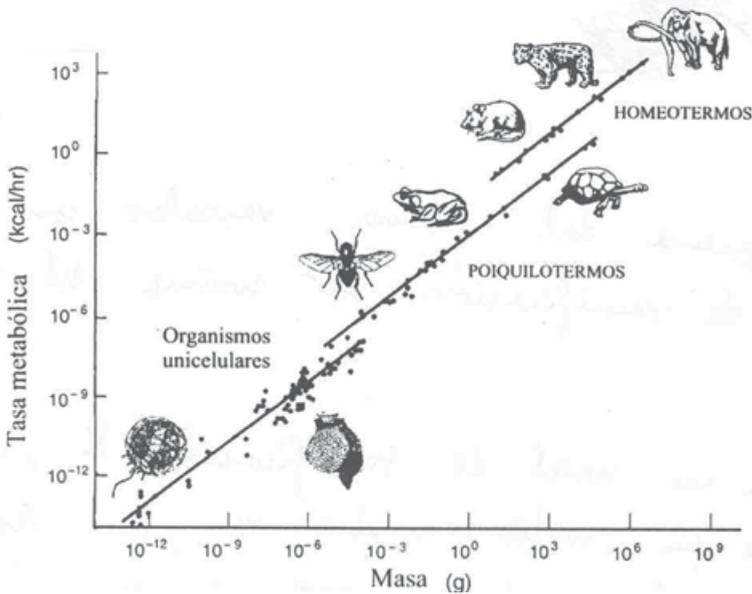


Fig. 7.2. Tasa metabólica en reposo en función de la masa corporal para tres grandes grupos de organismos. Las líneas corresponden a relaciones alométricas con exponente 0,75 pero con diferentes constantes de normalización. Hemmingsen (1960).

En 1961, el mismo Kleiber consideró que la expresión más fiable de la tasa metabólica en reposo para mamíferos era:

$$P_B = 70 \times M^{0,75} \text{ kcal/día}$$

con M expresado en kilogramos. Las dificultades experimentales y la variabilidad de las condiciones en las que se mide el ritmo metabólico hacen que no sea posible distinguir el exponente 0,75 de 0,73 o 0,76, pero lo que está demostrado con certeza es que no es 0,67 como se había creído razonando a partir de la superficie corporal y la disipación del calor generado en el metabolismo. Los resultados suelen expresarse, como hizo Kleiber, en kcal/día, pero, puesto que se trata de una magnitud con dimensiones de potencia, es interesante también darlos en vatios mediante la siguiente fórmula de conversión:

$$1 \text{ kcal/día} = \frac{4,183 \times 10^3 \text{ J}}{24 \times 3.600 \text{ s}} = 0,0484 \text{ W}$$

Así, la relación de Kleiber para mamíferos resulta ser:

$$P_B = 3,4 \times M^{0,75} \text{ W} \quad (7.1)$$

cuando la masa M se expresa en kilogramos. Lo que para una persona de 70 kg equivale a unos 82 W (1.700 kcal/día), para un ratón de 20 gramos a unos 0,18 W (3,7 kcal/día) y para un elefante de 5 toneladas a unos 2.000 W (41.000 kcal/día). Es frecuente también expresar la tasa metabólica en unidades de ml de O_2 consumidos por segundo:

$$P_B = 3,4 \times M^{0,75} \text{ W} = \frac{3,4 \text{ J / s}}{20 \text{ J / ml}O_2} \times M^{0,75} = 0,17 \times M^{0,75} \text{ ml}O_2 / \text{s}$$

Cuando la tasa metabólica se expresa en ml O_2/s , muchos textos utilizan la notación VO_2 , o velocidad de consumo de oxígeno, de forma que el consumo basal de oxígeno para mamíferos sería:

$$VO_2 = 0,17 \times M^{0,75} \text{ ml}O_2/s$$

Ejemplo. Si el factor de escala lineal entre Gulliver y un liliputiense es de 10, la relación entre sus masas es 1.000. Pero la ración de comida diaria de Gulliver no es de 1.000 raciones liliputienses, como se tiene tendencia a pensar, ya que la superficie de Gulliver es sólo 100 veces superior a la de un liliputiense y le resultaría imposible disipar el calor resultante de un metabolismo mil veces más intenso. De acuerdo con la regla de la superficie, le deberían bastar $1.000^{2/3} = 100$ raciones, lo que resulta en un ritmo vital mucho más lento que el de los comparativamente bulliciosos liliputienses. De acuerdo con la ley de Kleiber, la cantidad de comida necesaria para Gulliver debería ser equivalente a $1.000^{0,75} = 178$ raciones liliputienses. Su ritmo vital será más lento, pero no tanto como el que se deriva de la ley de la superficie. Aun así, tendrá un remanente de calor difícil de disipar a través de su superficie. Por lo tanto, no es verosímil que puedan existir organismos de dimensiones tan diferentes con la misma forma. Lo normal sería que un organismo como el de Gulliver hubiera desarrollado una forma tal que su superficie corporal fuera mayor que la que tendría en caso de ser una simple copia ampliada de un liliputiense (por ejemplo, con las orejas más grandes o con formas menos redondeadas) o estuviera menos protegida por el pelo (o la ropa).

La tasa metabólica específica se obtiene de forma inmediata:

$$\frac{P_B}{M} = 3,4 \times M^{-0,25} \text{ W/kg}$$

que nos indica que el ritmo metabólico por unidad de masa disminuye cuando la masa corporal aumenta. Un elefante necesita consumir en reposo $0,4 W$ por kilogramo de su masa, mientras que una persona necesita $1,2 W$ por kilogramo y un ratón $9 W$ por kilogramo.

La ley de Kleiber tiene un significado estadístico claro pero no es una descripción precisa de las propiedades de los organismos individuales. Incluso hay grupos de organismos que se desvían de la línea de regresión alométrica. Así, los mamíferos más pequeños, como las musarañas de unos gramos, tienen un metabolismo algo superior al predicho por la ecuación (7.1), debido a que experimentan una rápida pérdida de calor propia de un cuerpo cuya relación masa/superficie es extremadamente pequeña; y lo mismo ocurre con los mamíferos marinos, focas y ballenas, por ejemplo, seguramente debido a que necesitan un gasto superior de energía para mantener la temperatura corporal en el agua fría. Los animales adaptados a la vida en el desierto, por el contrario, tienen un ritmo metabólico menor que el “normal” seguramente también por razones de adaptación al medio.

Los grandes grupos de animales como los mamíferos, los reptiles, los peces y otros, tienen ritmos metabólicos muy distintos para la misma masa corporal. En general, **los animales poiquilotermos (de temperatura corporal variable) tienen una tasa metabólica basal mucho menor que la de los homeotermos (de temperatura corporal constante) a igualdad de masa**, lo que se traduce en valores muy distintos del coeficiente que aparece en la relación alométrica, pero si se comparan animales de distintos tamaños dentro de un mismo grupo, la variación de la tasa metabólica con la masa se ajusta siempre al exponente $0,75$, como se comprueba en la figura 7.2. En resumen, dicho exponente describe de forma aproximada y comprensiva la variación de la tasa metabólica con el tamaño para un enorme espectro de seres vivos, desde microorganismos unicelulares hasta las ballenas, cubriendo cerca de 18 órdenes de magnitud (un factor de 10^{18}) en masa corporal.

Las relaciones alométricas en general, y la de Kleiber en particular, expresan de modo simple regularidades en los seres vivos, que son los sistemas más complejos que existen. De hecho, son prácticamente los únicos ejemplos de leyes cuantitativas universales en biología que afectan al conjunto de los organismos y, como veremos, su origen debe situarse en principios muy generales comunes a todos ellos.

Un ejemplo interesante y verificable de la ley de Kleiber es el cambio en la tasa metabólica de los bebés. En efecto, mientras el feto está en el interior del cuerpo de la madre, desde el punto de vista metabólico se comporta como

un órgano de ésta y la tasa metabólica específica es la que corresponde a una masa corporal de unos 70 kg, es decir, $70 \times 70^{-0.25} = 24 \text{ kcal}/(\text{día} \times \text{kg})$. Inmediatamente después de nacer sigue manteniendo ese mismo ritmo metabólico, pero la actividad energética de las mitocondrias de sus células, así como la de los aparatos circulatorio y respiratorio, aumenta hasta llegar a situarse, tras un intervalo del orden de 36 horas, en un ritmo que es el que le corresponde de acuerdo con la ley de Kleiber. Para un bebé de 3 kg, sería $70 \times 3^{-0.25} = 53 \text{ kcal}/(\text{día} \times \text{kg})$, lo que supone más que duplicar su tasa metabólica específica.

En las aves, pueden distinguirse dos grandes grupos, los paseriformes, como los gorriones o las palomas, y los no paseriformes, como los pingüinos o las avestruces. Los primeros tienen masas generalmente pequeñas, desde pinzones de unos 6 gramos hasta cuervos de cerca de un kilogramo, mientras que los segundos cubren un rango de masas mucho mayor, desde los colibríes de unos 3 gramos hasta las avestruces de cerca de 100 kilogramos. La tasa metabólica en reposo para ambos grupos se ajusta a relaciones alométricas con un exponente del orden de 0,75, pero el coeficiente es distinto. Para los no paseriformes la tasa metabólica es indistinguible de la de los mamíferos, mientras que en el caso de los paseriformes casi duplica la de los mamíferos a igualdad de masa.

Medir la tasa metabólica de los poiquilotermos, como los reptiles, los anfibios o los peces, es todavía más difícil que en los animales de temperatura corporal constante, ya que cambia notablemente en función de la temperatura ambiente, la estación del año, la hora del día, las reservas de alimento y muchos otros factores externos. Lo único que puede hacerse es unificar las condiciones en las que se hacen las observaciones experimentales. Aun así, hay una enorme dispersión de resultados, con exponentes en la relación alométrica que relaciona tasa metabólica y masa que varían entre 0,6 y 1,0, lo que refleja las dificultades inherentes a las medidas de la tasa metabólica en estos grupos de animales. En todo caso, el coeficiente k en la expresión $P_B = kM^a$, que equivale a la tasa metabólica en reposo para un animal de 1 kg de masa, es muy inferior al que corresponde a mamíferos o aves. En el caso de los reptiles es del orden de 3 a 4 kcal/día (de 0,15 a 0,19 W), es decir, un factor 20 veces menor que para los mamíferos.

7.1.3 Derivación de la ley de Kleiber

Cabe preguntarse por la razón de que el metabolismo de los animales se ajuste a una relación alométrica con un exponente del orden de 0,75 y no a la simple regla de la superficie con un exponente 0,67. Como veremos más

adelante, la emergencia del valor $3/4$ dará lugar a que aparezcan multitud de leyes alométricas con exponentes múltiplos de $1/4$. Este hecho y la universalidad de la ley de Kleiber sugieren que se debe a la existencia de condiciones muy básicas comunes a todos los seres vivos que actúan a lo largo de todo el proceso evolutivo.

Durante mucho tiempo, la única explicación fue cualitativa, en el sentido de que dicho exponente representa una especie de compromiso entre la tendencia a que el calor generado por el metabolismo se disipe a través de superficies que crecen isométricamente con el tamaño, lo que llevaría al exponente $0,67$, y la tendencia a que el metabolismo asegure un ritmo vital elevado, independiente del tamaño, lo que llevaría a un exponente igual a 1 .

Otra posibilidad es que, en realidad, la tasa metabólica sea la suma de dos términos, uno con exponente $0,67$, que sería el asociado al metabolismo de mantenimiento de las funciones vitales, que variaría de acuerdo con la regla de la superficie, y otro con un exponente 1 , asociado al entorno gravitatorio en el que los animales han debido evolucionar. La fuerza gravitatoria es proporcional a la masa y, por lo tanto, habría una parte del metabolismo, que dependería de la masa con un exponente 1 necesario para contrarrestar la acción de la gravedad. Se trata de una posibilidad dudosa y sin ninguna apoyatura experimental, que no consideraremos en lo que sigue, aunque, como veremos, hay derivaciones de la ley de Kleiber que incorporan ingredientes similares.

El modelo de McMahon

En 1973 McMahon propuso una explicación esencialmente mecánica del exponente de Kleiber. Empezó estudiando las dimensiones de los huesos de las extremidades para poder resistir el peso del organismo y también las tensiones elásticas generadas durante el movimiento. Ya sabemos del capítulo precedente que eso implica que las dimensiones de dichas extremidades no pueden variar isométricamente, sino que si llamamos l a su longitud y d a su diámetro, deben ajustarse a una relación de semejanza elástica del tipo:

$$d \propto l^{\frac{3}{2}}$$

Si la masa de las extremidades es una fracción de la masa corporal, ésta será, por lo tanto:

$$M \propto d^2 l \propto d^2 d^{\frac{2}{3}} = d^{\frac{8}{3}}$$

de donde:

$$d \propto M^{\frac{3}{8}}$$

Ahora bien, la potencia desarrollada por los músculos es proporcional a la fuerza muscular y a la velocidad de contracción. Esta última es aproximadamente la misma para músculos homólogos en diferentes organismos, por lo que la diferencia neta entre unos animales y otros, en cuanto a potencia muscular se refiere, radica en la fuerza que, como sabemos, es proporcional a la superficie transversal del músculo:

$$P \propto d^2 \propto \left(M^{\frac{3}{8}} \right)^2 = M^{\frac{3}{4}}$$

Si hacemos la hipótesis de que esta expresión describe la potencia desarrollada por toda la masa muscular, todos los procesos metabólicos que sirven para proveer de energía a los músculos deben ajustarse a la misma expresión en función de la masa corporal, lo que daría como resultado que la tasa metabólica satisfaga la ley de Kleiber.

Una de las consecuencias de esta derivación es que muchas variables metabólicas relacionadas con el suministro de energía a los músculos, como las relacionadas con la circulación de la sangre o el intercambio de aire en los pulmones, deben comportarse de forma análoga, como veremos en lo que sigue. Por otra parte, la derivación se apoya en un gran número de hipótesis no bien establecidas y en las proporciones de las extremidades que se derivan de la semejanza elástica, que, como sabemos, sólo se aplican con cierta exactitud a algunos grupos de mamíferos.

El modelo fractal

En 1997, West, Brown y Enquist propusieron una explicación teórica de la ley de Kleiber basada en las propiedades de la red de suministro energético que todo ser vivo debe poseer. En efecto, las unidades del metabolismo son ciertos orgánulos celulares, en particular las mitocondrias, pero tanto los alimentos como el oxígeno deben ser allegados a todas las células del cuerpo mediante una red ramificada cuyos ejemplos más característicos son el sistema circulatorio para los animales o el sistema vascular para las plantas. Los mecanismos de bombeo, por su parte, son muy diferentes, desde la bomba muscular pulsante que es un corazón, en los animales, hasta los gradientes de concentración y presión de vapor que generan la circulación de fluidos en las plantas, pero hay ciertas características universales que las redes deben satisfacer y que están en la

base del comportamiento del metabolismo en función de la masa corporal. Las hipótesis básicas son:

a) La red de distribución está ramificada de forma que llega a cubrir todo el volumen del organismo.

b) La última rama, en la que se realiza el intercambio directo de nutrientes con las células (los capilares en el sistema circulatorio de los animales y los peciolos del sistema vascular de las plantas) tiene un diámetro fijo. Esta condición, verificada experimentalmente, se deriva del hecho, ya comentado, de que el tamaño de los seres vivos varía porque varía el número de células que los componen, no el tamaño de éstas, que es el mismo en todos los casos, tanto las receptoras de oxígeno como los glóbulos rojos.

c) Los organismos han evolucionado de forma que han minimizado la energía requerida para efectuar el transporte a través de la red.

De estos principios, que combinan condiciones físicas y geométricas, se deduce que los sistemas vasculares tienen una estructura fractal, es decir, que las pautas de ramificación se repiten indefinidamente en cada nivel, así como un conjunto de relaciones que comprende, de forma significada, la ley de Kleiber. No especificaremos aquí los detalles de la demostración, pero sí cuáles son los resultados que se van derivando de los principios enunciados más arriba y cómo se combinan para dar la forma de la tasa metabólica.

Empezaremos describiendo los rasgos más generales de la red de transporte. Se trata de un conjunto de conductos, que consideraremos cilíndricos, que se va bifurcando de forma que el tamaño de los conductos resultantes de la bifurcación es cada vez más pequeño.

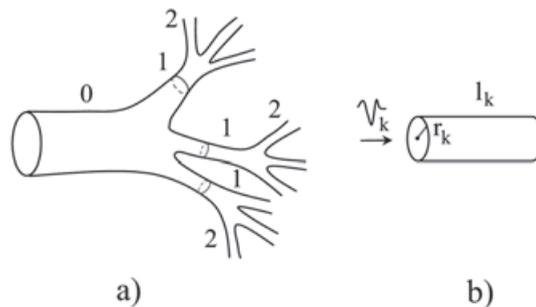


Fig. 7.3. a) Esquema del sistema vascular con dos niveles de ramificación por encima del nivel básico. b) En un nivel de ramificación k , cada conducto tiene un radio medio r_k , una longitud media l_k y la sangre circula por su interior a una velocidad v_k .

En el caso de los animales, los primeros niveles son vasos sanguíneos de diámetro grande que se van estrechando en las sucesivas ramificaciones, mientras

que en las plantas los vasos anchos son, en realidad, conjuntos paralelos de conductos estrechos, que se van separando en conjuntos con menos vasos cada vez, pero, desde el punto de vista del volumen de fluido transportado, ambas conformaciones son equivalentes.

Que la configuración resultante sea fractal significa en este caso que, en cada nivel de ramificación, el número de conductos, n , en que se divide un conducto del nivel precedente es siempre el mismo ($n \approx 3$ en los mamíferos), y que la relación entre longitud y la anchura de los conductos derivados respecto de las del conducto madre sean también parámetros constantes, independientes del nivel de ramificación.

Además de demostrarse, a partir de estos principios, que la tasa metabólica es proporcional a $M^{0,75}$, se obtienen otros resultados interesantes, como que el número total de capilares de un animal crece también con $M^{0,75}$, o que el número de ramificaciones, desde la aorta a los capilares, es proporcional al logaritmo de la masa corporal, de forma que para un ratón hay unas 16 ramificaciones mientras que para una ballena, cuya masa corporal es 10 millones de veces superior, llega casi a 30 ramificaciones y en los humanos es del orden de 22. También se puede demostrar, en el marco de este modelo, que el radio de la aorta es proporcional a $M^{3/8}$ y que la presión arterial y la velocidad de la sangre en la aorta es independiente de la masa corporal. Esta conclusión es en verdad asombrosa. En efecto, la aorta de una ballena es un cilindro de cerca de 30 *cm* de diámetro, mientras que la de una musaraña tiene un diámetro del orden de dos décimas de milímetro y, sin embargo, la velocidad de la sangre y la presión arterial es aproximadamente la misma en los dos casos, observándose en la práctica muy poca dependencia con la masa, apenas un exponente del orden de 0,07 y 0,03, respectivamente. Pueden encontrarse los resultados experimentales acerca de las variables vasculares mencionadas y su comparación con las predicciones del modelo en la siguiente tabla:

Variable cardiovascular	Exponente predicho	Exponente medido
Radio de la aorta, r_0	0,375	0,36
Velocidad de la sangre en la aorta, v_0	0	0,07
Volumen de sangre, v_f	1	1,00
Número de capilares, N_R	0,75	No hay datos
Presión arterial	0	0,03
Tasa metabólica, P_B	0,75	0,75

Una consecuencia claramente incorrecta de este modelo es que predice que la velocidad del fluido es la misma en cada nivel de vaso, desde la aorta a los capilares. Obviamente esta condición no se cumple en los últimos niveles (que corresponden a los vasos más estrechos). En efecto, la sangre circula por la aorta a una velocidad del orden de decenas de centímetros por segundo, mientras que en los capilares, para que el intercambio de nutrientes con las células sea eficaz, esta velocidad ha debido reducirse a milímetros por segundo. El origen de esta discrepancia es que, en una primera aproximación, no se tiene en cuenta el carácter pulsátil del flujo sanguíneo y, sobre todo, la viscosidad en el movimiento de la sangre. Al incorporar estos dos factores, se observa que en los primeros niveles, correspondientes a los vasos más anchos, sus efectos son menores y se conserva la velocidad en cada ramificación, mientras que en los niveles de conductos más estrechos aparece una resistencia a la circulación que hace que la velocidad vaya disminuyendo. Por ejemplo, en los humanos, la velocidad permanece aproximadamente constante en las ocho o diez primeras ramificaciones y disminuye a partir de ese punto. El tratamiento más detallado y completo del flujo sanguíneo muestra que el hecho de que las condiciones enunciadas más arriba sean válidas para los primeros niveles de vascularización basta para preservar las consecuencias globales, en particular la ley de Kleiber. En el capítulo 14 se verá con detalle cómo afecta la viscosidad a la pérdida de velocidad en los vasos más estrechos.

Puede hacerse un desarrollo similar para el sistema vascular de las plantas y el resultado es el mismo. La tasa metabólica depende alométricamente de la masa de la planta con un exponente igual a 0,75.

Una de las dificultades que tienen los dos modelos anteriores es que, al centrarse en un único fenómeno que controla las capacidades metabólicas, hace difícil entender las distintas pautas de consumo energético, por ejemplo el mínimo que corresponde al metabolismo basal o en reposo y el que corresponde al máximo esfuerzo muscular. En efecto, si una única causa limita la tasa metabólica en reposo, es difícil entender que ésta pueda aumentar en situación de máxima actividad porque tendría que desbordar un límite que ya está actuando en el reposo.

Así, se han propuesto modelos en los que se estudia el proceso metabólico en detalle, combinando el comportamiento de cada uno de los pasos; por ejemplo la ventilación pulmonar, el trabajo cardíaco, la circulación, el intercambio celular, el transporte intracelular, la síntesis de ATP y de proteínas, el mantenimiento de los potenciales iónicos, etc. Por ejemplo, Darveau *et al.*, en 2002, llegan, para el reposo, a un exponente global cuyo valor es del orden de 0,75, de acuerdo con la evidencia experimental, pero en el caso de máximo esfuerzo no sólo varía la constante k , que se multiplica por diez, aproximadamente, respecto de su valor

en el reposo, sino que el exponente a es del orden de 0,88, próximo al valor experimental de 0,85.

La existencia de varios modelos para explicar desde un punto de vista teórico la dependencia de la tasa metabólica con la masa es una indicación de que se trata de un problema no resuelto de forma convincente. Los distintos modelos suponen métodos de aproximación diferentes que, seguramente, habrá que tener en cuenta en una explicación más consolidada del fenómeno, pero en estos momentos la cuestión sigue siendo debatida y objeto de numerosos trabajos de investigación. El modelo fractal, por su parte, aunque sólo sea una aproximación parcial al problema y conceptualmente esté más relacionado con la tasa metabólica en actividad que con la de reposo, incorpora elementos comunes a todos los organismos pluricelulares que ayudan a entender la universalidad de la ley de Kleiber.

7.1.4 La tasa metabólica máxima

La tasa metabólica necesaria para mantener el máximo de esfuerzo aeróbico, por ejemplo en carrera o en vuelo a la máxima velocidad sostenida que sea posible, depende, como hemos mencionado en el párrafo precedente, de la capacidad del sistema respiratorio y cardiovascular para mantener un flujo continuo de oxígeno desde el entorno a las mitocondrias celulares.

En mamíferos, dicha tasa metabólica es del orden de 10 veces la que corresponde al reposo. Estudios experimentales realizados por Taylor y Weibel en 1981 para 22 especies dieron como resultado un ritmo metabólico:

$$P_{\text{máx}} \simeq 38 \times M^{0,81} W \quad (7.2)$$

con la masa expresada en kilogramos. La inclusión de datos existentes en la literatura para 23 especies más modificó el exponente promedio hasta llevarlo a un valor del orden de 0,85. En la expresión (7.2) se aprecia que la tasa máxima para un animal de un kilogramo es 38 vatios, unas 11 veces superior a los 3,4 vatios de la tasa metabólica en reposo para esa misma masa. Para una persona de 70 kg, el factor es algo superior debido a que el exponente alométrico es más grande que el que aparece en la tasa metabólica en reposo. Aplicando la fórmula (7.2), resulta una tasa máxima de unos 1.200 W, unas 15 veces superior a la tasa en reposo (80 W), que es del orden de la reseñada en la tabla 5.2 para el pedaleo sostenido a gran velocidad.

Sin embargo, hay excepciones notables a esta conclusión. Como ya hemos visto en el capítulo 5, los atletas de primer nivel mundial, con un entrenamiento intensivo, son capaces de alcanzar un nivel metabólico máximo superior, lo mismo que las variedades de caballos y perros que han experimentado un largo

proceso de selección para poder sostener velocidades muy elevadas. En general, los animales domésticos tienen una tasa metabólica máxima que puede ser muy superior a la media de las especies naturales, por ejemplo en el caso de los animales corredores, o bien muy inferior, como en el caso del ganado criado para dar carne o leche. Como también vimos en el capítulo 5, pueden desarrollarse tasas metabólicas muy superiores durante intervalos de tiempo muy cortos (del orden de segundos) en esfuerzos basados en el metabolismo anaerobio.

Las aves alcanzan, en promedio, una tasa metabólica máxima superior, comparativamente, a la de los mamíferos, con una constante multiplicativa en la relación alométrica del orden de 15 veces mayor que la de reposo. Los murciélagos, por su parte, comparten este parámetro con las aves y constituyen otra excepción en los mamíferos.

7.1.5 El metabolismo de los tejidos

Es interesante examinar dónde se produce la disminución del ritmo metabólico específico (por unidad de masa) según aumenta la masa corporal, tal como reflejan las leyes de escala estudiadas hasta ahora. Hay unos pocos órganos muy activos metabólicamente que son los que, en reposo, acaparan la mayor parte de la energía consumida. Por ejemplo, **el corazón, los riñones, el cerebro, el hígado y el bazo suponen apenas el 8 por ciento de la masa corporal en una persona y, sin embargo, consumen cerca de las tres cuartas partes de la potencia metabólica en reposo**, mientras que la otra cuarta parte se consume en el 92 por ciento restante de la masa corporal, compuesta por los músculos, tendones, esqueleto, piel, tejido adiposo y otros.

Podría pensarse, por lo tanto, que la tasa metabólica específica disminuye porque disminuye el tamaño relativo de los órganos más activos. Pero el examen de los datos disponibles no permite llegar a esa conclusión.

Tabla 7.2. Masa relativa de los distintos órganos corporales		
Órgano	Masa en función de la masa corporal (en kg)	Porcentaje de la masa corporal ($\frac{M_{\text{órgano}}}{M} \times 100$)
Corazón	$0,006 \times M$	0,6
Riñones	$0,007 \times M^{0,85}$	$0,7 \times M^{0,15}$
Cerebro	$0,009 \times M^{0,67}$	$0,9 \times M^{-0,33}$
Pulmones	$0,01 \times M$	1
Hígado	$0,03 \times M^{0,87}$	$3 \times M^{-0,13}$
Masa muscular	$0,40 \times M$	40

El único órgano cuyo tamaño disminuye en relación con la masa corporal de forma clara es el cerebro, mientras que los riñones y el hígado lo hacen a un ritmo inferior al de la disminución de la tasa metabólica. El corazón, los pulmones y los músculos representan un porcentaje fijo de la masa total, independientemente del tamaño.

Así pues, **el decrecimiento del ritmo metabólico específico proporcionalmente a $M^{-0.25}$ no se debe a una disminución de ese orden en la masa de los órganos más activos, sino al decrecimiento de la actividad metabólica de los tejidos que conforman dichos órganos.** Ahora bien, la actividad metabólica puede ser correlacionada con el número de mitocondrias por unidad de volumen en las células y con la concentración de enzimas metabólicas relacionadas con la actividad mitocondrial. Ambas variables han sido medidas en función de la masa corporal observándose esa disminución. Así, la densidad de mitocondrias en el hígado (número de mitocondrias por unidad de masa del órgano) ha sido estudiada en mamíferos de tamaños muy distintos llegándose a la conclusión de que:

$$\frac{n_{\text{mitocondrias}}}{M_{\text{hígado}}} \propto M^{-0,10}$$

de donde se sigue que:

$$n_{\text{mitocondrias}} \propto M_{\text{hígado}} \times M^{-0,10} \propto M^{0,87} \times M^{-0,10} = M^{0,77}$$

lo que muestra que el equipamiento metabólico de los distintos tejidos se corresponde con las necesidades energéticas del organismo, que se ajustan a la ley de Kleiber, combinando el volumen del tejido con su actividad metabólica específica.

7.2 El suministro energético

Hemos visto cuáles son las necesidades energéticas de los organismos en función del tamaño. Para cubrirlas hay que aportar nutrientes y oxígeno a través de complicados sistemas y este aporte debe también acomodarse al ritmo de consumo que expresan las relaciones de escala. Repasaremos ahora cómo se produce esta adecuación en el sistema respiratorio y en el circulatorio.

7.2.1 Los pulmones y el suministro de oxígeno

Ya sabemos que el consumo de oxígeno es, para los organismos aerobios, proporcional al de energía. Así, si la potencia metabólica específica

disminuye en función de la masa del animal como $M^{-0,25}$, de esa misma forma deberá comportarse el suministro de oxígeno al organismo. Ya hemos visto que este fenómeno no puede derivarse de una disminución relativa del tamaño de los pulmones cuando aumenta la masa corporal ya que éstos suponen una fracción constante del cuerpo. Pueden verse algunas otras características de la respiración en reposo en mamíferos en la tabla 7.3 con datos de Stahl (1967).

Tabla 7.3.- Parámetros del sistema respiratorio en función de la masa corporal		
Parámetro	Variación con M (en kg)	Resultado para $M = 70$ kg
Capacidad total	$57 \times M^{1,03}$	4.500 ml
Volumen por inhalación	$7,7 \times M^{1,04}$	640 ml
Ritmo de ventilación	$0,38 \times M^{0,80}$	11 l/min
Frecuencia de respiración	$53 \times M^{-0,26}$	17 inhal/min
Ritmo de consumo de oxígeno	$11,6 \times M^{0,76}$	293 ml O_2 /min

La última línea de la tabla expresa sencillamente la ley de Kleiber, mientras que las dos primeras reflejan el hecho de que el volumen de aire bombeado por los pulmones en cada inhalación es proporcional a la masa corporal, puesto que los exponentes 1,03 y 1,04 son prácticamente equivalentes a 1, en correspondencia con el hecho de que también lo es la masa de los propios pulmones. Si dividimos, además, la segunda por la primera, encontramos que el volumen de aire en cada inhalación es una fracción constante de la capacidad total, aproximadamente 1/7, desde un ratón a un elefante. Por lo demás, los pulmones de todos los mamíferos tienen las mismas propiedades elásticas y extraen, además, la misma fracción de oxígeno, aproximadamente un 3 por ciento del volumen de aire respirado.

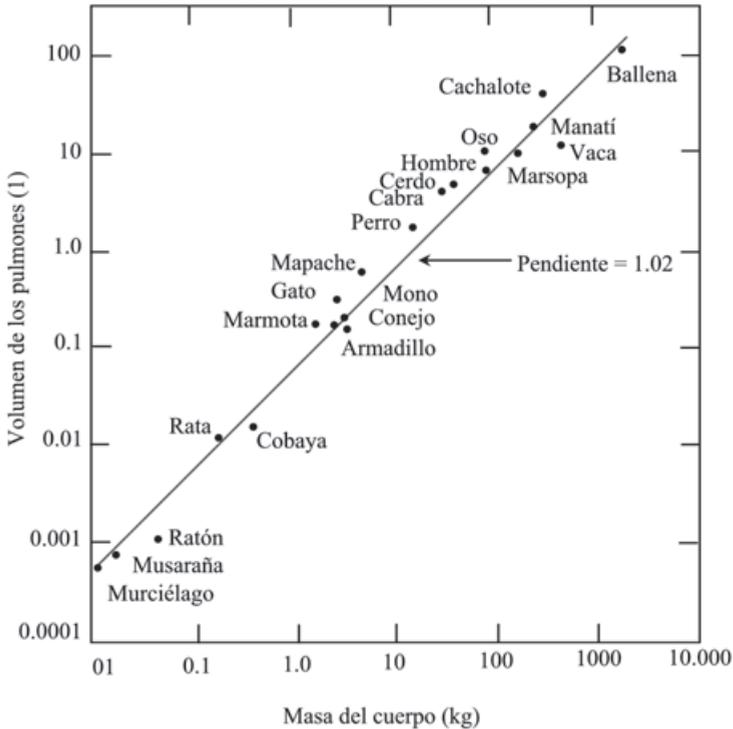


Fig. 7.4. Volumen de los pulmones, en litros, en función de la masa corporal. La pendiente de la recta es indistinguible de 1, es decir, el volumen de los pulmones representa una fracción constante de la masa del cuerpo. Tenney y Remmers (1963).

Lo que genera la diferencia en el aporte de oxígeno al organismo es la frecuencia de respiración, muy grande en el caso de los animales pequeños y muy pequeña en los animales grandes, con una dependencia de la masa igual a la de la tasa metabólica específica.

En las aves, el sistema respiratorio es muy distinto al de los mamíferos, lo que se traduce en que las constantes multiplicativas en la tabla precedente varían considerablemente, y la eficacia extractora de oxígeno en cada inhalación es algo superior, del orden del 4 por ciento del volumen del aire respirado. Pero los exponentes alométricos son iguales, lo que hace que la explicación de la variación del suministro de oxígeno en función de la masa sea la misma que para los mamíferos: **se relaciona exclusivamente con el ritmo respiratorio y no con el tamaño de los pulmones, que es proporcional a la masa corporal, ni a sus propiedades, que son las mismas con independencia del tamaño del animal.**

7.2.2 *La circulación de la sangre*

La capacidad de transporte del sistema circulatorio

Una vez extraído el oxígeno del aire en los pulmones, es preciso transportarlo a través del torrente sanguíneo hasta las células que lo van a consumir. De nuevo podemos preguntarnos por las razones de la variación de la cantidad de oxígeno transportada en función de la masa corporal. El oxígeno se fija en los pulmones a una molécula, la hemoglobina, contenida en los glóbulos rojos de la sangre, y luego es liberado en los capilares. Así, la capacidad de transporte de oxígeno depende de la concentración de hemoglobina y ésta resulta ser la misma para todos los mamíferos: entre 130 y 150 gramos de hemoglobina por litro de sangre, contenidos en los glóbulos rojos, que representan alrededor de un 45 por ciento de la sangre, siendo el resto plasma.

Un aumento en el número de glóbulos rojos implica aumentar la capacidad de transporte de oxígeno, pero se traduce en un aumento de la viscosidad, de forma que la concentración de hemoglobina presente en todos los mamíferos es el resultado evolutivo de un compromiso: optimizar la capacidad de transporte de oxígeno sin aumentar la viscosidad de la sangre hasta un punto en el que el corazón tenga que hacer un trabajo imposible o peligroso. En este aspecto, como en la mayoría de los relacionados con los seres vivos, hay algunas excepciones: los mamíferos más pequeños y los organismos que viven en ambientes de gran altitud, escasos de oxígeno, sobrepasan los 150 gramos de hemoglobina por litro de sangre. La razón por la que muchos atletas se entrenan en altitud es, precisamente, conseguir que el organismo responda a la escasez de oxígeno ambiental aumentando la concentración de hemoglobina en la sangre, lo que, según hemos visto, genera un efecto colateral peligroso como es la sobrecarga del corazón.

Tampoco el tamaño de los glóbulos rojos depende del tamaño del organismo. En los mamíferos su diámetro varía entre $5 \mu m$ y $9 \mu m$ (del orden de $7,5 \mu m$ para los humanos), sin ninguna correspondencia con la masa corporal, lo que implica que el diámetro de los capilares, adaptado al paso de los glóbulos rojos, es universal, el mismo para un ratón y un elefante. En las aves los glóbulos rojos son ligeramente más grandes y en reptiles y anfibios su tamaño es mayor.

La capacidad de transporte de oxígeno en sangre es, por lo tanto, la misma para todos los mamíferos con unas pocas excepciones. La cantidad total de hemoglobina en un organismo será igual a su concentración multiplicada por el volumen total de sangre, pero éste es aproximadamente proporcional a la masa del cuerpo:

$$V_{\text{sangre}} \simeq 66 \times M \text{ ml}$$

donde la masa se expresa en kilogramos. Para una persona de 70 kg, el volumen de sangre en el cuerpo se sitúa entre los 4,5 y los 5 litros, mientras que para un elefante de 5 toneladas es unos 350 litros. Como la densidad del cuerpo es del orden de la de la sangre, de esta expresión se sigue que la sangre ocupa un volumen que es entre un 6 y un 7 por ciento del volumen corporal en todos los casos. También en este punto hay excepciones. Los mamíferos buceadores presentan un volumen de sangre sistemáticamente más grande que el de otros mamíferos del mismo tamaño. Se trata de una nueva adaptación a un modo de vida que exige almacenar oxígeno durante periodos de tiempo largo, lo que se consigue aumentando el volumen de la sangre, que se usa como depósito.

En resumen, la cantidad total de hemoglobina en un organismo es proporcional a la masa del cuerpo y no puede dar cuenta de la dependencia en el ritmo de oxígeno transportado.

El corazón

La frecuencia cardíaca

Para mover la sangre a través del sistema circulatorio existe un órgano, el corazón, que actúa como bomba capaz de impulsar la sangre por la red de conductos y hacer llegar con ella a todos los rincones del cuerpo el oxígeno, los nutrientes, las hormonas, el calor, los residuos del metabolismo, etc. La capacidad de impulso del corazón depende de su tamaño, del volumen de sangre que mueve en cada contracción y de la frecuencia de latido. En la tabla 7.4 se da la dependencia con la masa corporal de algunos parámetros del sistema circulatorio, medida experimentalmente, según Li (2000). Obsérvese que los exponentes asociados a la presión arterial y al radio de la aorta, 0,03 y 0,36, coinciden aproximadamente con los derivados en la sección 7.1.3, 0,0 y $3/8 = 0,375$.

Tabla 7.4. Parámetros del sistema circulatorio en función de la masa corporal		
Parámetro	Variación con M (en kg)	Resultado para $M = 70 \text{ kg}$
Frecuencia cardíaca	$220 \times M^{-0,27}$	70 <i>puls/min</i>
Vol. de sangre por impulso	$0,66 \times M^{1,05}$	57 <i>ml</i>
Presión arterial	$89 \times M^{0,03}$	100 <i>mm de Hg</i>
Radio de la aorta	$0,21 \times M^{0,36}$	0,97 <i>cm</i>
Longitud de la aorta	$17 \times M^{0,31}$	63 <i>cm</i>
Masa del corazón	$0,0066 \times M^{0,98}$	0,42 <i>kg</i>

El corazón, como ya hemos visto, representa aproximadamente un 0,6 por ciento de la masa corporal para los mamíferos, independientemente del tamaño del animal, excepto, como veremos, para el caso particular de los extremadamente pequeños. El volumen de sangre impulsada en cada contracción es proporcional al volumen del corazón y, por lo tanto, también a la masa del cuerpo. Ambas afirmaciones se ven corroboradas en la tabla 7.4. Los exponentes de la relación alométrica para el volumen de sangre en cada impulso y para la masa del corazón son 1,05 y 0,98, a todos los efectos prácticos iguales a 1, que es el valor que equivale a la proporcionalidad con la masa corporal.

Por el contrario, donde hay una variación clara con la masa corporal es en la frecuencia cardíaca, que disminuye según una relación alométrica con un exponente aproximadamente igual a 1/4:

$$f_{card}(mamíferos) \approx 220 \times M^{-0,27} \text{ pulsaciones por minuto} \quad (7.3)$$

Es decir, **la disminución del ritmo específico (por unidad de masa) de transporte de oxígeno y nutrientes, conforme a la ley de Kleiber, se explica enteramente mediante la frecuencia cardíaca y no mediante ninguna otra característica estructural del corazón o de la sangre.** Todas ellas, menos la frecuencia cardíaca, son constantes, independientes del tamaño del animal. Ocurre en este caso exactamente lo mismo que para el suministro de oxígeno, que, según hemos visto en el apartado anterior, depende enteramente de la frecuencia respiratoria.

La ecuación que da la frecuencia cardíaca en función de la masa corporal predice que el corazón de una persona de 70 kg late en reposo con una frecuencia de unas 70 pulsaciones por minuto, mientras que el de un elefante de 5 toneladas late a 22 pulsaciones por minuto y el de una rata de 100 g a unas 410 pulsaciones por minuto.

El problema es que en los animales más pequeños, como las musarañas (un ejemplar de *Suncus etruscus* adulto pesa unos 2,5 g, mientras que uno de *Sorex cinereus* se sitúa entre los 3 g y los 4 g), el ritmo cardíaco tendría que ser enorme, unas 1.050 pulsaciones por minuto para una masa de 3 gramos. Por razones que veremos al considerar la regulación de la temperatura corporal, estos animales incansables, que no paran de moverse e ingerir alimento, tienen una tasa metabólica todavía mayor que la que les correspondería por su masa diminuta. Por lo tanto, a igualdad de todos los otros factores, su corazón debería latir a la inconcebible frecuencia de más de 2.000 pulsaciones por minuto.

El corazón necesita un tiempo mínimo para contraerse, expulsar sangre, relajarse y llenarse de nuevo de sangre para impulsarla de nuevo. Hay, por

lo tanto, **un límite inferior en el tiempo entre dos latidos sucesivos, que se estima en unos 50 milisegundos**, por debajo del cual es imposible que el corazón complete el ciclo, lo que se traduce en un límite superior a la frecuencia cardíaca. Este límite es, por lo tanto, de $1/0,050 = 20$ pulsaciones por segundo o, lo que es equivalente, 1.200 pulsaciones por minuto. La frecuencia cardíaca más grande observada en musarañas al máximo de actividad es, en efecto, de unas 1.300 pulsaciones por minuto, lo que implica que en reposo tiene que ser menor, situándose, de hecho, alrededor de las 600 pulsaciones por minuto.

Por lo tanto, para hacer frente a las necesidades de su metabolismo, los mamíferos más pequeños no pueden incrementar la frecuencia cardíaca, como hacen todos los demás, con arreglo a la expresión (7.3). Es preciso que alguno de los otros factores sea claramente distinto, y este factor resulta ser el tamaño del corazón. En los animales minúsculos, el corazón es comparativamente el triple de grande que en el resto de los mamíferos, suponiendo un 1,7 por ciento, aproximadamente, de la masa corporal. Así, en el extremo inferior de la escala de tamaños aparece una cierta discontinuidad, ya que las necesidades metabólicas no se cubren simplemente aumentando el ritmo cardíaco como en todos los demás, al alcanzarse un límite infranqueable, sino que tiene que ser complementado con el aumento relativo del corazón.

En las aves, ocurre algo muy parecido. El tamaño del corazón es proporcional al del cuerpo, pero mayor que en los mamíferos, un 0,8 por ciento aproximadamente. La frecuencia cardíaca es, por su parte, algo menor a igualdad de masa con los mamíferos, pero varía en función de la masa corporal con la misma ley alométrica:

$$f_{card}(aves) \approx 160 \times M^{-0,25} \text{ pulsaciones por minuto} \quad (7.4)$$

Nótese que la combinación de mayor capacidad del corazón y menor frecuencia hace que la cantidad de sangre movida por unidad de tiempo en aves y mamíferos sea similar, de conformidad con una tasa metabólica también similar. También en el caso de las aves más pequeñas, en los colibríes concretamente (los ejemplares de *Selasphorus scintilla* pesan algo menos de 3 gramos), ocurre el mismo fenómeno que en los mamíferos. Estas aves diminutas llegan hasta el límite de la frecuencia cardíaca de unas 1.300 pulsaciones por minuto en los momentos de máximo esfuerzo y necesitan un corazón unas tres veces más grande que el que les correspondería por su tamaño si pudieran aumentar su frecuencia cardíaca de acuerdo con la regla general, hasta llegar a suponer un 2,4 por ciento de la masa corporal. Sólo así pueden subvenir a sus necesidades metabólicas.

Los murciélagos tienen características metabólicas parecidas a las de las aves y el tamaño de su corazón, a una masa corporal dada, se parece más al de las aves que al de los mamíferos. Y también en los casos de murciélagos diminutos, como el *Pipistrellus pipistrellus*, que pesa apenas 5 gramos, su corazón es el doble del que le “correspondería” en función de su tamaño.

En los mamíferos marsupiales el corazón es también una fracción constante de la masa del cuerpo y el ritmo cardíaco se ajusta a una expresión del tipo:

$$f_{card}(marsupiales) \approx 110 \times M^{-0.25} \text{ pulsaciones por minuto} \quad (7.5)$$

es decir, se comporta como en el resto de los animales de sangre caliente, con el mismo exponente alométrico pero distinta constante de proporcionalidad. El valor de esta última en la ecuación (7.5) muestra que, a igualdad de masa, la frecuencia cardíaca es del orden de la mitad que en el resto de los mamíferos, lo que implica que su tasa metabólica sea también menor.

Los reptiles y anfibios tienen un corazón menor en comparación con el de los animales de sangre caliente, entre un 0,4 y un 0,5 por ciento de la masa corporal. Su tasa metabólica específica se ajusta también a la ley de Kleiber a través del cambio de ritmo cardíaco, aunque en los animales de sangre fría éste depende considerablemente de las condiciones ambientales. Lo mismo ocurre en el caso de los peces, cuyo corazón es todavía más pequeño, aproximadamente un 0,2 por ciento de su masa total.

En el máximo de actividad, los mamíferos pueden llegar a aumentar su ritmo cardíaco en un factor entre dos y tres (las musarañas apenas pueden llegar a un factor dos). En las aves, el factor es de ese mismo orden, aunque se ha observado que las palomas pueden multiplicar el número de pulsaciones en reposo por un factor próximo a seis en los momentos de máximo esfuerzo. Sin embargo, la tasa metabólica máxima llega a ser hasta 15 veces la del reposo, lo que implica que a este aumento deben contribuir otros factores, además del aumento del ritmo cardíaco. Éstos son el aumento de la presión arterial, que puede duplicarse, y la fracción de oxígeno que los músculos son capaces de extraer de la sangre en los momentos de gran esfuerzo, que supone un factor suplementario del orden de tres respecto de la eficacia extractora en situación de reposo.

El trabajo que hace el corazón al mover una cierta cantidad de sangre a lo largo de una distancia l será:

$$W = F \times l = p \times S \times l = p \times V$$

donde p es la presión que el corazón es capaz de ejercer, igual a la fuerza que imprime a la sangre dividida por la sección transversal total de los conductos por los que la impulsa, de forma que $F = p \times S$. Por otro lado, $V = S \times l$ es el volumen de sangre desplazado en un latido (más adelante se verá con detalle la noción de presión y su aplicación al caso del sistema circulatorio). La sangre es impulsada a través de la aorta y de la arteria pulmonar, pero la presión en esta última es del orden del 20 por ciento de la de la aorta, por lo que, dado que el volumen de sangre tiene que ser el mismo, el trabajo que hace el corazón es, salvo una corrección del 20 por ciento, el que necesita para impulsar la sangre a través de la arteria aorta.

La presión en la aorta es cíclica y varía según esté el corazón en fase de sístole o de diástole, de forma que consideraremos, para simplificar, la presión media. Como ya vimos en una sección anterior, la presión media en la aorta es una constante en todos los mamíferos, desde los ratones a los elefantes, con un valor igual a $1,3 \times 10^4 \text{ N/m}^2 \approx 0,13 \text{ atmósferas} \approx 100 \text{ mm de Hg}$. En realidad, esta presión es lo que definiremos más adelante como presión manométrica, igual a la diferencia entre la presión del fluido (en este caso la sangre) y la presión atmosférica, exterior al conducto por el que se mueve, que es de una atmósfera. La presión total en el interior de la aorta es, por tanto, igual a $1,13 \text{ atm} = 880 \text{ mm de Hg}$, en todo caso igual para todos los mamíferos. Como el volumen de sangre expulsado en un latido es proporcional a la masa, deducimos que el trabajo que realiza el corazón en cada latido es proporcional también a la masa corporal. Y como la frecuencia de latido es proporcional a $M^{-0,25}$, la potencia cardíaca (trabajo realizado por unidad de tiempo) será proporcional a $M^{-0,75}$, de nuevo en consonancia con la ley de Kleiber.

El tiempo de circulación

La diferencia en la concentración de oxígeno de la sangre es de 50 ml por litro de sangre entre la más rica y la más pobre en oxígeno. Por lo tanto, para proporcionar al organismo una cantidad X de oxígeno, expresada en litros, es preciso movilizar:

$$\frac{X}{0,050} = 20X \text{ litros de sangre} \quad (7.6)$$

Dado que la tasa metabólica en reposo para mamíferos, medida en vatios, es $3,4 \times M^{0,75}$, de acuerdo con la expresión (7.1), podemos encontrar fácilmente el volumen de oxígeno que es preciso consumir por minuto:

$$VO_2 = 3,4 \times M^{0,75} \text{ J / s} \times 60 \text{ s / min} = \frac{204 \times M^{0,75} \text{ J / min}}{20 \text{ J / mlO}_2} = 0,0102 \times M^{0,75} \text{ mlO}_2 / \text{min}$$

y para estimar la cantidad de sangre que hay que desplazar hay que multiplicar el volumen de oxígeno por 20, de acuerdo con la expresión (7.6). Así, la cantidad de sangre movilizada por el corazón es del orden de:

$$\frac{\Delta V_{\text{sangre}}}{\Delta t} \approx 0,2 \times M^{0,75} \text{ litros de sangre por minuto} \quad (7.7)$$

que se aproxima mucho al resultado obtenido en medidas directas de volúmenes de sangre impulsados por el corazón. Para una persona de 70 kg, la expresión (7.7) nos dice que su corazón moviliza $0,2 \times 70^{0,75} \approx 4,8$ litros de sangre por minuto; es decir, la totalidad de la sangre de una persona recorre el circuito sanguíneo en un tiempo del orden de un minuto. Se llama, justamente, **tiempo de circulación al tiempo que tarda toda la sangre de un animal en completar la circulación y, por lo tanto, renovar su contenido de oxígeno.** Su expresión general será:

$$\Delta t = \frac{\Delta V_{\text{sangre}}}{\frac{\Delta V_{\text{sangre}}}{\Delta t}} = \frac{0,066 \times M}{0,2 \times M^{0,75}} = 0,33 \times M^{0,25} \text{ minutos} = 20 \times M^{0,25} \text{ segundos}$$

que nos indica que una musaraña de 3 gramos hace circular la totalidad de su sangre en unos 4 segundos, mientras que un elefante tarda algo menos de 3 minutos. Por supuesto que si se está haciendo ejercicio en lugar de estar en reposo, el tiempo de circulación disminuye y puede llegar a ser la quinta parte de su valor en reposo.

7.3 El tiempo biológico

Como ya hemos visto, la frecuencia respiratoria o cardíaca de los animales más pequeños es muy grande, así como la velocidad con que mueven sus extremidades, mientras que ocurre todo lo contrario en los animales grandes. Estas diferencias están ligadas a las diferentes tasas metabólicas específicas y se reflejan en muchas otras variables relacionadas con el tiempo: tiempo de gestación, de madurez sexual y de vida. Así, el tiempo fisiológico tiene una relación con el tiempo físico distinta para cada organismo, dependiendo básicamente de la masa corporal.

A partir de la frecuencia cardíaca de los mamíferos podemos calcular la duración de cada latido del corazón en función de la masa corporal expresada en kilogramos:

$$t_{latido} = \frac{1}{f_{card}} = \frac{1}{220} M^{0,27} \text{min} = 0,27 \times M^{0,27} \text{seg} \quad (7.8)$$

y lo mismo puede hacerse para el tiempo entre dos inhalaciones al respirar:

$$t_{inhal} = \frac{1}{f_{resp}} = \frac{1}{53} M^{0,26} \text{min} = 1,1 \times M^{0,26} \text{seg} \quad (7.9)$$

La tasa metabólica específica es proporcional a $M^{-0,25}$, por lo que el “tiempo metabólico”, definido como el tiempo que se tarda en consumir una cierta cantidad de energía por unidad de masa corporal, será proporcional al inverso de la tasa específica y se comportará también como $M^{0,25}$. El tiempo fisiológico se puede definir a partir del ritmo metabólico, o de circulación sanguínea o de extracción de oxígeno, o de consumo y renovación de alguna sustancia básica como una hormona o la glucosa. Todos estos procesos están ligados, como hemos visto en las secciones precedentes, y por esa razón, sea cual sea su definición, **el tiempo fisiológico es una función creciente de la masa y, más en concreto, proporcional a $M^{0,25}$.**

El hecho de que todos los tiempos tengan el mismo comportamiento permite encontrar relaciones entre ellos en las que se cancela la dependencia en la masa. Por ejemplo, a partir de las expresiones (7.8-9), la razón entre las frecuencias cardíaca y respiratoria en los mamíferos será:

$$\frac{f_{card}}{f_{resp}} = \frac{220 \times M^{0,27}}{53 \times M^{0,26}} \approx 4,2 \quad (7.10)$$

Es decir, en todos los mamíferos, independientemente de su masa, la frecuencia cardíaca es igual a la respiratoria multiplicada por un factor cuyo valor es del orden de 4,2 a 4,5. Lo mismo ocurre con las aves, pero el factor es del orden de 9.

Consideremos ahora el tiempo medio de vida de un animal. Se trata de un concepto difícil de definir con precisión. En efecto, no es lo mismo la vida media de un animal en la naturaleza, sujeto a la acción de predadores, falta de alimento o calamidades naturales, que en cautividad, donde no se da ninguna de estas contingencias. Por otra parte, en condiciones naturales el tiempo de vida máximo que alcanzan algunos individuos dista mucho del promedio de la especie a la que pertenecen. Aun con todas estas dificultades, puede afirmarse que la duración de la vida aumenta con la masa e, incluso, se ha cuantificado esta relación para mamíferos y aves en cautividad:

$$t_{vida}(mamíferos) \approx 12 \times M^{0,20} \text{ años} \quad (7.11)$$

$$t_{vida}(aves) \approx 28 \times M^{0,19} \text{ años} \quad (7.12)$$

donde la masa M se expresa en kg . Para animales en la naturaleza, la duración promedio de su vida es notablemente menor que lo que resulta de las expresiones (7.11-12). Como puede verse, mamíferos y aves muestran una dependencia con la masa similar, pero la comparación de los coeficientes indica que las aves viven aproximadamente 2,3 veces más que los mamíferos a igualdad de masa. Un mamífero de $1 kg$ tiene una vida media de unos 12 años, mientras que un ave del mismo tamaño alcanza los 28 años. Según esta expresión, un perro de $30 kg$ vivirá, por término medio, 23 años, y un elefante, unos 65 años. La vida media para una persona de $70 kg$ resultaría ser menor de 30 años, que es entre un medio y un tercio de su valor real, por lo que los humanos son una excepción a la regla, excepción que quizá esté relacionada con el gran tamaño de su cerebro.

Es difícil saber si la diferencia entre los exponentes de las ecuaciones (7.11-12) y el exponente típico de todos los tiempos fisiológicos, 0,25, es real o se debe a imprecisiones en la definición y medida de la vida media. Es muy probable que se deban únicamente a este último factor y se ajusten, en realidad, al exponente universal 0,25.

Si ése fuera el caso, resultaría que **el número de latidos del corazón o de inhalaciones al respirar es una constante independiente de la masa de los organismos**. En efecto, el número de latidos, por ejemplo, será igual al tiempo total de vida dividido por el tiempo que dura un latido:

$$N_{latidos} = \frac{t_{vida}}{t_{latido}} = \frac{12 \times 365 \times 24 \times 3600 \times M^{0,20}}{0,27 \times M^{0,27}} \approx 1,4 \times 10^9$$

donde hemos expresado el tiempo de vida en segundos y hemos despreciado el exponente residual de la masa. Así, los corazones de un elefante y de un ratón de 20 gramos laten aproximadamente el mismo número de veces a lo largo de sus vidas, pero a ritmos muy diferentes. Lo mismo ocurre con el número de inhalaciones:

$$N_{inhal} = \frac{t_{vida}}{t_{inhal}} = \frac{12 \times 365 \times 24 \times 3600 \times M^{0,20}}{1,1 \times M^{0,26}} \approx 3,4 \times 10^8$$

Se ha discutido mucho acerca de la longevidad de la vida humana en comparación con la del resto de los mamíferos. Como esa excepcionalidad coincide con una encefalización también excepcional en los humanos, ha llegado a proponerse que la duración promedio de la vida está correlacionada con el tamaño relativo del cerebro más que con la masa corporal. Conclusión que contradice lo que ocurre en las aves, con una vida media más larga y cerebros más pequeños. La realidad es que no se sabe por qué los humanos se apartan de la regla de forma tan notable y, si hay alguna relación con el tamaño del cerebro, cuáles puedan ser los mecanismos causantes de la excepcionalidad.

7.4 Ejercicios propuestos

Ejercicio 7.1 *Los elefantes africano y asiático son animales que se pueden considerar isométricos. Los machos del elefante africano pueden llegar a pesar 6 toneladas y tener una altura en cruz del orden de 3,5 metros, mientras que los del elefante asiático llegan hasta las 4 toneladas de peso y los 3 metros de altura en cruz. Así, el factor de isometría en masas es del orden de $6/4 = 1,5$, mientras que en dimensiones lineales será:*

$$\frac{L_2}{L_1} = \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{0,33} = 1,5^{0,33} \approx 1,145$$

donde los subíndices 1 y 2 corresponden a la especie africana y a la asiática, respectivamente. Como puede verse, la relación entre dimensiones lineales es la que existe aproximadamente entre las alturas máximas de los dos tipos de animales. Las tasas metabólicas en reposo cumplirán la regla de Kleiber:

$$\frac{P_2}{P_1} = \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{0,75} = 1,5^{0,75} \approx 1,355$$

mientras que si fueran exactamente isométricos la relación entre sus superficies corporales sería:

$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{0,67} \approx 1,312$$

de forma que si el elefante asiático tiene la superficie adecuada para disipar el calor que genera su metabolismo, el elefante africano generaría proporcionalmente más calor que el que podría disipar a través de la suya. Así que sería lógico que hubiera una cierta modificación en la forma

que aumentara la superficie corporal del africano respecto del asiático. Podemos estimar cuál debería ser esa superficie “suplementaria”:

$$S_2 = 1,355 \times S_1 = (1,312 + 0,043) \times S_1 = 1,312 \times S_1 + 0,043 \times S_1$$

donde el primer sumando es la superficie del elefante asiático ampliada isométricamente hasta las dimensiones del africano, mientras que el segundo término representa la superficie “suplementaria” para ser capaz de evacuar el calor generado. Si la superficie de un elefante asiático es de unos 30 m^2 , el aumento del metabolismo según la relación alométrica de Kleiber implica que la superficie del elefante africano debe aumentar hasta los $1,355 \times 30 = 40,7 \text{ m}^2$, que se componen de $1,312 \times 30 = 39,4 \text{ m}^2$, correspondientes al aumento de escala, más $0,043 \times 30 = 1,3 \text{ m}^2$ suplementarios. Ahora bien, ambas variedades de elefantes son muy similares excepto en las orejas, mucho mayores en la variedad africana, en una cantidad del orden de la necesaria para proporcionarle esa superficie “suplementaria”.

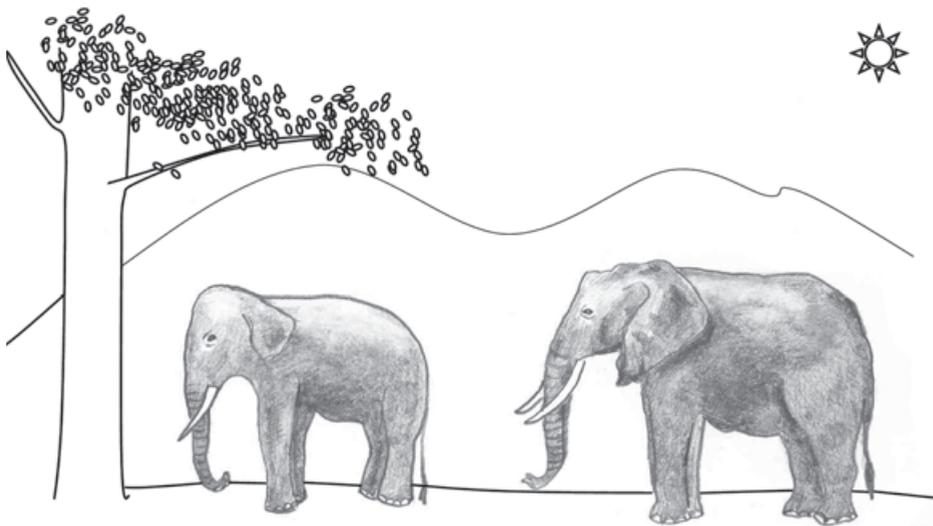


Fig. 7.5. Elefante africano y asiático. Nótese la diferencia en la superficie de las orejas.

Ejercicio 7.2 Un elefante de 5 toneladas de masa come unos 250 kg al día de vegetales (aproximadamente un 5 por ciento de su propia masa). Suponiendo que la tasa metabólica de campo (promedio durante un día) sea un 50 por ciento superior a la tasa metabólica basal, estimar la capacidad energética media del alimento ingerido.

Sol.: 25 kcal/100 gramos de alimento

Ejercicio 7.3 Suponiendo que un conejo de 1 kg coma el mismo tipo de alimento vegetal que el elefante del problema anterior, calcular cuánto debe ingerir por día para cubrir su tasa metabólica de campo. Hacer lo mismo para una rata de 50 g.

Sol.: Conejo: 0,42 kg/día (42 % de su masa);

Rata: 45 g/día (90 % de su masa)

Ejercicio 7.4 Si una persona ingiere una media de 600 g de alimento al día y su tasa metabólica de campo es también un 50 por ciento superior a la tasa metabólica basal, calcular la capacidad energética media de dicho alimento.

Sol.: 400 kcal/100 gramos de alimento

Ejercicio 7.5 Sea una persona de 70 kg de masa. Suponiendo que su tasa metabólica de campo es un 50 por ciento superior a la tasa metabólica en reposo, a) calcular la cantidad de oxígeno consumida por minuto para cubrir sus necesidades energéticas; b) suponiendo que su frecuencia respiratoria sea de 18 inhalaciones por minuto y que extrae oxígeno en cada una de ellas en una cantidad que supone el 3 por ciento del aire inhalado, calcular la cantidad de aire inhalado en cada inhalación; c) si la persona vive 80 años, calcular la cantidad total de aire inhalado a lo largo de su vida.

Sol.: a) 360 mlO₂/min; b) 670 ml/inhal; c) 507.000 m³

Ejercicio 7.6 A partir de la presión media en la aorta de una persona de 70 kg, y del volumen de sangre impulsado en cada latido, calcular la potencia consumida por el corazón para generar el flujo sanguíneo.

Sol.: $P = 7,5 W$ ($\sim 9\%$ de P_B)

Ejercicio 7.7 Hacer el mismo cálculo para una rata de 100 g de peso.

Sol.: $P = 0,045 W$ ($\sim 7,5\%$ de P_B)

7.5 Referencias

Benedict, F. G. *Vital Energetics: A Study in Comparative Basal Metabolism*. Carnegie Institute of Washington, 1938

Cyr, H. "Individual Energy Use and Allometry of Population Density". En *Scaling in Biology*, editado por J. H. Brown y G. B. West. Oxford University Press, 2000

Damuth, J. "Population Density and Body Size in Mammals". *Nature* **290** (1981) 699

- Darveau, Ch-A. *et al.* "Allometric cascade as a unifying principle of body mass on metabolism". *Nature* **417** (2002) 166
- Hemmingsen, A. M. "Energy metabolism as related to body size and respiratory surfaces, and its evolution". *Reports of the Steno Memorial Hospital and Nordisk Insulin Laboratorium* **9** (1960) 6
- Kleiber, M. "Body size and metabolism". *Hilgardia* **6** (1932) 315
- Kleiber, M. "The Fire of Life: An Introduction to Animal Energetics". Wiley, 1961
- Li, John K-J. "Scaling and Invariants in Cardiovascular Biology". En *Scaling in Biology*, editado por J. H. Brown y G. B. West. Oxford University Press, 2000
- McMahon, T. & Bonner, J. T. "Tamaño y Vida". *Scientific American*, 1983
- Schmidt-Nielsen, K. "Scaling: Why is animal size so important?". *Cambridge University Press*, 1984
- Stahl, W. R. "Scaling of respiratory variables in mammals". *J. Appl. Physiol.* **22** (1967) 453
- Tenney, S. M. & Remmers, J. E. "Comparative quantitative morphology of the mammalian lung: diffusing area". *Nature* **197** (1963) 54
- Taylor, C. R. & Weibel, E. R. "Design of the mammalian respiratory I. Problem and strategy". *Resp. Physiol.* **44** (1981) 1
- West, G. B., Brown, J. H. & Enquist, B. J. "A General Model for the Origin of Allometric Scaling Laws in Biology". *Science* **276** (1997) 122
- West, G. B., Brown, J. H. & Enquist, B. J. "The Origin of Universal Scaling Laws in Biology". En *Scaling in Biology*, editado por J. H. Brown y G. B. West. Oxford University Press, 2000

Apéndice A.

Lista de tablas

Tabla 1.1 Nombres y abreviaturas de múltiplos y submúltiplos

Tabla 1.2 Características del salto de algunos animales

Tabla 3.1 Algunos valores del coeficiente de rozamiento

Tabla 3.2 Velocidades límite en aire para algunos objetos

Tabla 5.1 Algunas unidades de energía

Tabla 5.2 Tasa metabólica (para una persona de unos 70 kg) asociada a algunas actividades

Tabla 6.1 Masa y tamaño de distintos organismos

Tabla 6.2 Cerebro y masa corporal para distintos grupos de animales

Tabla 6.3 Coste energético del desplazamiento en función de la masa corporal

Tabla 6.4 Potencia relativa necesaria para subir una pendiente

Tabla 7.1 Relaciones alométricas para ciertas variables del sistema circulatorio

Tabla 7.2 Masa relativa de los distintos órganos corporales

Tabla 7.3 Parámetros del sistema respiratorio en función de la masa corporal

Tabla 7.4 Parámetros del sistema circulatorio en función de la masa corporal

Apéndice B. Alfabeto griego

Letra	Minúscula	Mayúscula
Alfa	α	
Beta	β	
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Épsilon	ε	
Zeta	ζ	
Eta	η	
Theta	θ	Θ
Iota	ι	
Kappa	κ	
Lambda	λ	Λ
Mu	μ	
Nu	ν	
Xi	ξ	Ξ
Pi	π	Π
Ro	ρ	
Sigma	σ	Σ
Tau	τ	
Upsilon	υ	Υ
Fi	φ	Φ
Chi	χ	
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

Apéndice C. Constantes fundamentales

Magnitud	Símbolo	Valor	Unidades
Velocidad de la luz en el vacío	c	$2,99792458 \times 10^8$	ms^{-1}
Constante Newton Gravitación	G	$6,67259 \times 10^{-11}$	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$
Masa del electrón	m_e	$9,1093897 \times 10^{-31}$	kg
Masa del protón	m_p	$1,6726231 \times 10^{-27}$	kg
Masa del neutrón	m_n	$1,6749286 \times 10^{-27}$	kg
Unidad de masa atómica $1 \text{ u.m.a.} = \left(\frac{1}{12}\right) m(^{12}\text{C})$		$1,66053873 \times 10^{-27}$ 931,49	Kg MeV/c ²
Cociente masas protón/electrón	m_p / m_e	1836,153	
Número de Avogadro	N_A	$6,0221367 \times 10^{23}$	mol^{-1}
Temperatura punto triple del agua	T_r	273,16	K
Constante de Boltzmann	k_B	$1,380658 \times 10^{-23}$	JK ⁻¹
	k_B	$8,617385 \times 10^{-5}$	eV K ⁻¹
Constante de los gases	$R = N_A k_B$	8,31451	$\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$
Constante de Stefan-Boltzmann	σ	$5,6704 \times 10^{-8}$	$\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$
Carga elemental	e	$1,60217733 \times 10^{-19}$	C
Constante de Faraday	$F = e N_A$	96485,309	C mol^{-1}

Permeabilidad magnética del vacío	μ_0	$4\pi \times 10^{-7}$	N A^{-2}
Permitividad dieléctrica del vacío	$\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$	$8,854187817 \times 10^{-12}$	$\text{N}^{-1} \text{m}^{-2} \text{C}^2$
Constante de Coulomb	$K_E = 1/(4\pi\epsilon_0)$	$8,987552 \times 10^9$	$\text{N m}^2 \text{C}^{-2}$
Constante de Planck	h	$6,6260755 \times 10^{-34}$	J s
	h	$4,1356692 \times 10^{-15}$	eV s
	$h/2\pi$	$1,05457266 \times 10^{-34}$	J s
Magnetón de Bohr	μ_B	$9,2740154 \times 10^{-24}$	J T^{-1}
Radio de Bohr	R_B	$5,29177249 \times 10^{-11}$	m

Apéndice D. La tabla periódica

1 H Hidrógeno 1.00794		TABLA PERIÓDICA DE ELEMENTOS										2 He Helio 4.00260																																																																																								
3 Li Litio 6.941	4 Be Berilio 9.01218	5 B Boro 10.811	6 C Carbono 12.0107	7 N Nitrógeno 14.00674	8 O Oxígeno 15.9994	9 F Fluor 18.99840	10 Ne Neón 20.1797	11 Na Sodio 22.98977	12 Mg Magnesio 24.3050	13 Al Aluminio 26.98154	14 Si Silicio 28.0855	15 P Fósforo 30.97376	16 S Azufre 32.066	17 Cl Cloro 35.4527	18 Ar Argón 39.948	19 K Potasio 39.0983	20 Ca Calcio 40.078	21 Sc Escandio 44.95591	22 Ti Titanio 47.867	23 V Vanadio 50.9415	24 Cr Cromo 51.9961	25 Mn Manganeso 54.93805	26 Fe Hierro 55.845	27 Co Cobalto 58.93320	28 Ni Niquel 58.6934	29 Cu Cobre 63.546	30 Zn Zinc 65.39	31 Ga Galio 69.723	32 Ge Germanio 72.61	33 As Arsénico 74.92160	34 Se Selenio 78.96	35 Br Bromo 79.904	36 Kr Criptón 83.80	37 Rb Rubidio 85.4678	38 Sr Estroncio 87.62	39 Y Ytrio 88.90585	40 Zr Zirconio 91.224	41 Nb Niobio 92.90638	42 Mo Molibdeno 95.94	43 Tc Tecnecio (98)	44 Ru Rutenio 101.07	45 Rh Rodio 102.90550	46 Pd Paladio 106.42	47 Ag Plata 107.8682	48 Cd Cadmio 112.411	49 In Indio 114.818	50 Sn Estanho 118.710	51 Sb Antimonio 121.760	52 Te Teluro 127.60	53 I Yodo 126.90447	54 Xe Xenón 131.29	55 Cs Cesio 132.90545	56 Ba Bario 137.327	57 La Lantano 138.9055	58 Ce Cerio 140.116	59 Pr Praseodimio 140.90765	60 Nd Neodimio 144.24	61 Pm Prometio (145)	62 Sm Samario 150.36	63 Eu Europio 151.964	64 Gd Gadolinio 157.25	65 Tb Terbio 158.92534	66 Dy Disprosio 162.50	67 Ho Holmio 164.93032	68 Er Erbio 167.26	69 Tm Terbio 168.93421	70 Yb Iterbio 173.04	71 Lu Lutecio 174.967	72 Hf Hafnio 178.49	73 Ta Tantalio 180.9479	74 W Wolframio Tungsteno 183.84	75 Re Renio 186.207	76 Os Osmio 190.23	77 Ir Iridio 192.217	78 Pt Platino 195.078	79 Au Oro 196.96655	80 Hg Mercurio 200.59	81 Tl Talio 204.3833	82 Pb Plomo 207.2	83 Bi Bismuto 208.98038	84 Po Polonio (209)	85 At Astatio (210)	86 Rn Radón (222)	87 Fr Francio (223)	88 Ra Radio (226)	89 Ac Actinio (227)	90 Th Torio 232.0381	91 Pa Protactinio 231.03588	92 U Uranio 238.0289	93 Np Neptunio (237)	94 Pu Plutonio (244)	95 Am Americio (243)	96 Cm Curio (247)	97 Bk Berkelio (247)	98 Cf Californio (251)	99 Es Einsteinio (252)	100 Fm Fermio (257)	101 Md Mendelevio (258)	102 No Nobelio (259)	103 Lr Lawrencio (262)

Número atómico	58
Simbolo	Ce
Nombre	Cerío
Peso atómico (*)	140.116

- Sólidos a presión y temperatura ambiente
- Líquidos a presión y temperatura ambiente
- Gases a presión y temperatura ambiente

(*) El peso atómico corresponde al promedio de los isótopos con sus abundancias naturales y se expresa en u.m.a. (ver Capítulo 24)
 Los valores entre paréntesis corresponden al peso atómico del isótopo más estable
Pm Elementos preparados artificialmente, no presentes en la naturaleza

Apéndice E. Vectores

6.1 Caracterización de un vector

6.1.1 Coordenadas cartesianas

La proyección del vector posición sobre los ejes de coordenadas son sus componentes cartesianas (cuando no se diga otra cosa, se entenderá que las componentes de un vector son las cartesianas), de forma que podemos representarlo mediante el símbolo \vec{r} , o bien mediante las componentes:

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

A lo largo de todo el libro, se consideran únicamente magnitudes vectoriales que se derivan del vector posición, como son la velocidad, la aceleración, el momento o el momento angular, entre otras, o vectores que caracterizan fuerzas. Puede generalizarse, no obstante, el concepto de vector a un número arbitrario de coordenadas, pero nosotros nos limitaremos a los de tres componentes. En general:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) \tag{E.1}$$

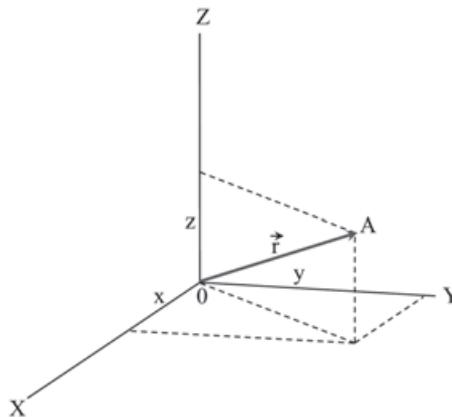


Fig. E.1. Vector posición y sus componentes respecto de un sistema de referencia. Las coordenadas cartesianas del punto A son las tres componentes x, y, z .

6.1.2 Módulo

Denotaremos el módulo de un vector \vec{a} mediante el mismo símbolo sin flecha, en este caso a , o bien usando la notación $|\vec{a}|$. De la figura E.1 es inmediato comprobar, aplicando el teorema de Pitágoras, que el módulo de un vector está relacionado con sus componentes de la siguiente forma:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \quad (\text{E.2})$$

Y para el caso del vector posición:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (\text{E.3})$$

6.1.3 Coordenadas polares

Llamaremos ángulo polar, θ , al que forma el vector posición con el eje Z y azimutal, φ , al que forma la proyección de dicho vector sobre el plano XY con el eje X, tal como puede verse en la figura E.2. Utilizando las magnitudes trigonométricas (ver el Apéndice F), resulta:

$$x = r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \quad (\text{E.4})$$

$$y = r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \quad (\text{E.5})$$

$$z = r \cos \theta \quad (\text{E.6})$$

A los tres parámetros, módulo, ángulo polar y ángulo azimutal (r, θ, φ), se les llama coordenadas polares y, en consecuencia, un vector puede caracterizarse por sus componentes cartesianas o, de forma equivalente, por sus componentes polares. Nótese que, a partir de las ecuaciones (E.4-6), se recupera la relación (E.3) entre el módulo y las componentes cartesianas. La caracterización de un vector por sus coordenadas polares es útil cuando se tratan problemas con simetría esférica, es decir, problemas en los que las magnitudes fundamentales sólo dependen de la distancia a un cierto punto, que se toma como origen de coordenadas. En ese caso, la coordenada relevante es el módulo r del vector posición y no sus componentes cartesianas.

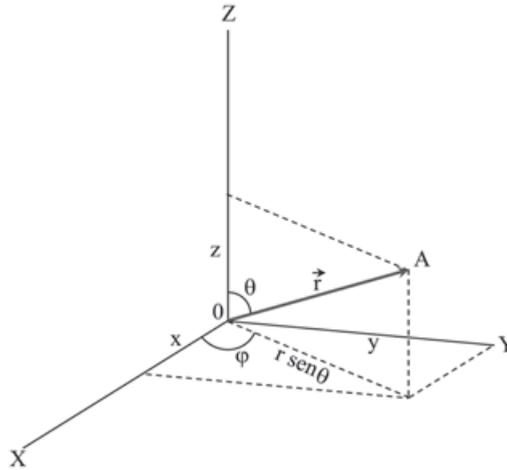


Fig. E.2. Coordenadas polares del punto A: r , θ , φ .

A partir de las ecuaciones de transformación (E.4-6), es inmediato encontrar las transformaciones inversas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{E.7}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \tag{E.8}$$

$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{E.9}$$

Ejemplo. Sea el vector posición $\vec{r} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$. Las coordenadas polares de ese punto serán:

$$r = \sqrt{2 + 2 + 4} = 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1; \quad \varphi = 45^\circ$$

$$\cos \theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \theta = 45^\circ$$

6.1.4 Coordenadas cilíndricas

Un problema tiene simetría cilíndrica o, equivalentemente, axial cuando la coordenada relevante es la distancia a un eje. En ese caso, es conveniente escoger el sistema de referencia de forma que el eje Z coincida con el eje de

simetría, siendo el origen, en consecuencia, un punto perteneciente a dicho eje. La caracterización más adecuada del vector posición para este tipo de problemas es mediante la distancia ρ al eje de simetría, la coordenada z y el ángulo azimutal entre la proyección del vector posición sobre el plano perpendicular al eje Z y un eje fijo, contenido en dicho plano, que podemos escoger como eje X .

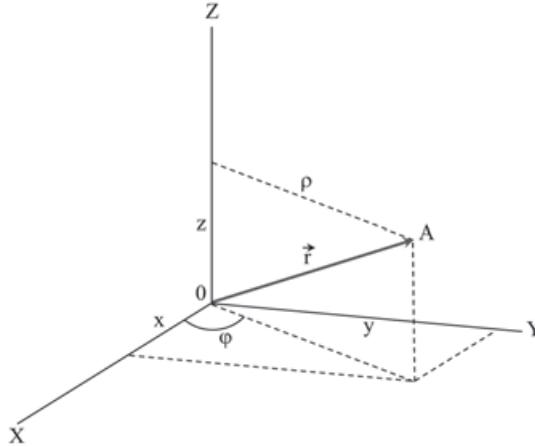


Fig. E.3. Coordenadas cilíndricas del punto A: ρ , ϕ , z .

La relación entre coordenadas cartesianas y cilíndricas es evidente en la figura E.3:

$$x = \rho \cos \phi \quad (\text{E.10})$$

$$y = \rho \operatorname{sen} \phi \quad (\text{E.11})$$

$$z = z \quad (\text{E.12})$$

La relación entre el módulo del vector y las componentes cilíndricas puede deducirse inmediatamente de las ecuaciones (E.10-12):

$$r^2 = \rho^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

La transformación inversa será:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{E.13})$$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{y}{x} \quad (\text{E.14})$$

Ejemplo. Sea el vector posición $\vec{r} = (1, \sqrt{3}, 2)$. Sus coordenadas cilíndricas serán:

$$\rho = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3}; \quad \varphi = 60^\circ$$

$$z = 2$$

6.2 Operaciones con vectores

6.2.1 Igualdad de vectores

Dos vectores, \vec{a} y \vec{b} son iguales si lo son en módulo, dirección y sentido:

$$\vec{a} = \vec{b}$$

o, de forma equivalente, si tienen iguales sus tres componentes:

$$a_x = b_x$$

$$a_y = b_y$$

$$a_z = b_z$$

en cualquier sistema de coordenadas. Es obvio que si las componentes cartesianas de dos vectores son iguales también lo son las componentes polares y cilíndricas.

6.2.2 Multiplicación por un número

Si λ es un número cualquiera, el producto de ese número por un vector \vec{a} es otro vector \vec{b} :

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}$$

tal que sus tres componentes cartesianas cumplen las siguientes relaciones:

$$b_x = \lambda a_x$$

$$b_y = \lambda a_y$$

$$b_z = \lambda a_z$$

de donde se sigue que el módulo de \vec{b} es también igual al módulo de \vec{a} multiplicado por λ :

$$b = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2} = \sqrt{\lambda^2 a_x^2 + \lambda^2 a_y^2 + \lambda^2 a_z^2} = \lambda \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \lambda a$$

De la definición de multiplicación de un vector \vec{a} por un número λ se sigue que el resultado es otro vector en la misma dirección que \vec{a} pero con un módulo que es igual al de éste multiplicado por λ . Dos vectores proporcionales (tales que uno es igual al otro multiplicado por un número) son, por lo tanto, paralelos y viceversa, dos vectores paralelos son siempre proporcionales. Cuando la constante de proporcionalidad λ es negativa, los vectores tienen sentido contrario, mientras que tienen el mismo sentido si es positiva.

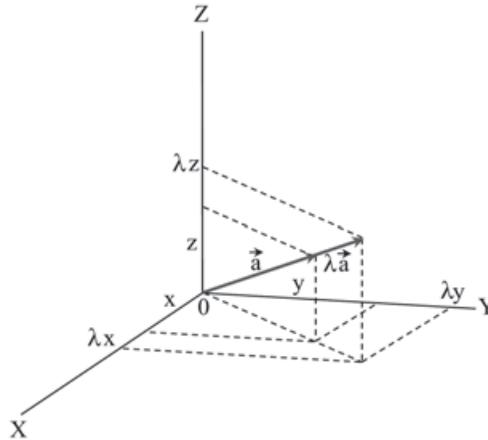


Fig. E.4. Multiplicación de un vector \vec{a} por un número λ .

A partir de las expresiones que dan la transformación entre coordenadas polares y cilíndricas en función de las cartesianas, (E.7-9), (E.13-14), se deduce que los parámetros r , ρ y z resultan multiplicados por el número λ , mientras que los ángulos θ y φ permanecen constantes.

6.2.3 Suma de vectores

Se dice que un vector \vec{c} es igual a la suma de dos vectores \vec{a} y \vec{b} :

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

si cada una de sus componentes es igual a la suma de las componentes de los vectores sumandos:

$$c_x = a_x + b_x \quad (\text{E.15})$$

$$c_y = a_y + b_y \quad (\text{E.16})$$

$$c_z = a_z + b_z \quad (\text{E.17})$$

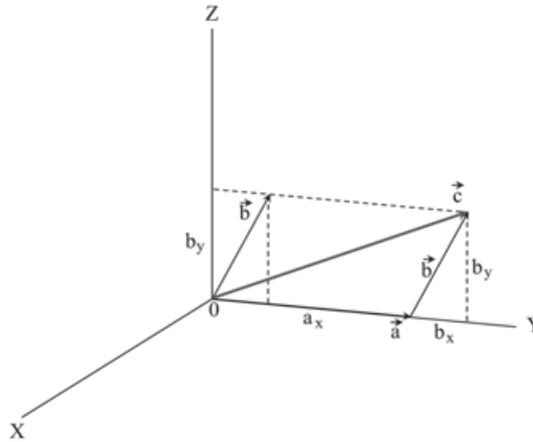


Fig. E.5 Suma de vectores, $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

La interpretación geométrica de la suma de vectores es sencilla. En efecto, puesto que la igualdad entre vectores equivale a la igualdad entre sus componentes en cualquier sistema de referencia, tomemos un sistema en el que uno de los ejes, por ejemplo el Y , coincida con la dirección del vector \vec{a} y en el que el vector \vec{b} esté contenido en el plano YZ , tal y como se muestra en la figura E.5. Es inmediato darse cuenta de que el vector suma es la diagonal del paralelogramo formado a partir de los dos vectores sumando. Por eso a esta regla se la conoce como regla del paralelogramo y para cualquier sistema de referencia, la suma de dos vectores puede obtenerse siempre gráficamente a partir de esta regla. Para hacer todavía más sencilla su aplicación, suele ser conveniente trasladar paralelamente uno de los vectores de forma que su origen coincida con el extremo del otro. La suma es el vector que va del origen del primero al extremo del segundo, como puede comprobarse en la figura E.5.

La suma de un número cualquiera de vectores se generaliza trivialmente a partir de las expresiones (E.15-17), añadiendo en los segundos miembros las componentes de todos los vectores sumando. Gráficamente, es conveniente sumar primero dos vectores con ayuda de la regla del paralelogramo, luego sumar el resultado obtenido a un tercer vector y así sucesivamente.

La combinación de la multiplicación de un número por un vector y la suma de vectores permite definir una operación llamada combinación lineal de vectores:

$$\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$$

que equivale, en componentes, a:

$$c_x = \lambda a_x + \mu b_x$$

$$c_y = \lambda a_y + \mu b_y$$

$$c_z = \lambda a_z + \mu b_z$$

Gráficamente, debemos primero dibujar los vectores $\lambda \vec{a}$ y $\mu \vec{b}$ a partir de \vec{a} y \vec{b} , simplemente multiplicando los módulos y dejando invariable la dirección en cada uno de ellos, y luego sumarlos con ayuda de la regla del paralelogramo. De esta regla se sigue inmediatamente que cualquier combinación lineal de dos vectores es un vector que se encuentra en el plano definido por ambos (ver la figura E.6).

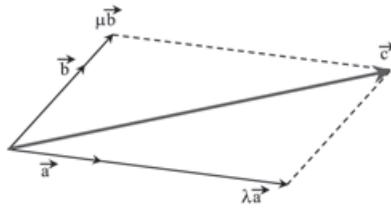


Fig. E.6. Combinación lineal de vectores, $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$.

6.2.4 Vectores unitarios

Llamamos vector unitario a cualquier vector cuyo módulo sea igual a la unidad. Puede obtenerse el vector unitario en la dirección de un vector cualquiera \vec{a} simplemente multiplicándolo por el inverso de su módulo:

$$\vec{u}_a = \frac{1}{a} \vec{a} \quad (\text{E.18})$$

que equivale, en componentes, a:

$$u_{a,x} = \frac{a_x}{a}$$

$$u_{a,y} = \frac{a_y}{a}$$

$$u_{a,z} = \frac{a_z}{a}$$

y es inmediato comprobar que su módulo es igual a 1:

$$|\vec{u}_a|^2 = \frac{1}{a^2} (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2) = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

Ejemplo. Sea el vector:

$$\vec{a} = (1, \sqrt{3}, 2)$$

El vector unitario en la dirección de \vec{a} será:

$$\vec{u}_a = \frac{1}{2\sqrt{2}} \vec{a} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Hay tres vectores de especial importancia, conocidos como \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} , que son unitarios y tienen direcciones a lo largo de los tres ejes coordenados X, Y, Z. Sus componentes son, por definición:

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$

y de la definición de combinación lineal de varios vectores es obvio que todo vector \vec{a} se puede expresar de la siguiente forma:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \quad (\text{E.19})$$

siendo a_x, a_y, a_z sus componentes cartesianas. Un conjunto de tres vectores, tales que cualquier vector puede escribirse como una combinación lineal de los tres, forma lo que se llama una base del espacio vectorial. Por lo tanto, el conjunto $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ es una base.

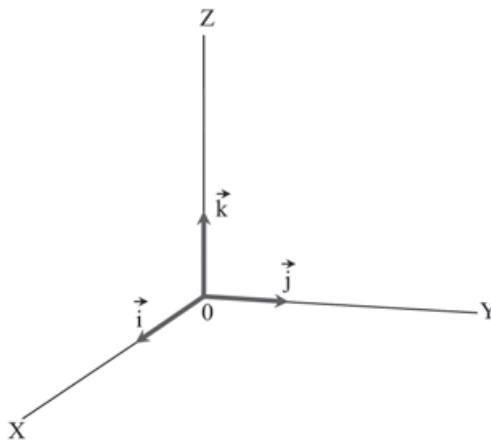


Fig. E.7. Vectores unitarios, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Los vectores unitarios se representarán, en general, mediante la letra u . Por ejemplo, los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados pueden simbolizarse como u_x, u_y, u_z , aunque, por razones históricas, en este caso particular ya hemos visto que se suelen representar como i, j, k .

6.2.5 Producto escalar

Llamamos producto escalar de dos vectores \vec{a} y \vec{b} a la cantidad que resulta de multiplicar los módulos de ambos vectores entre sí y por el coseno del ángulo que forman:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \theta \quad (\text{E.20})$$

donde a y b son los módulos de ambos vectores y θ es el ángulo que forman entre ellos (comprendido entre 0° y 180°). De la definición se sigue que:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

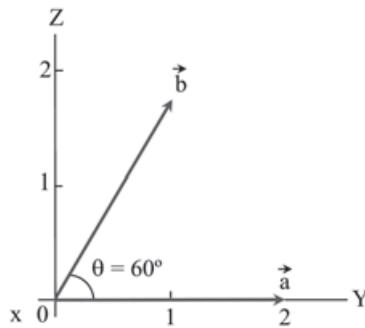


Fig. E.8. Los vectores $\vec{a} = (0,2,0)$ y $\vec{b} = (0,1,\sqrt{3})$.

Nótese que los dos factores de esta operación son vectores, mientras que el resultado es un escalar, es decir, una cantidad que se expresa con un sólo número.

Ejemplo 4. Sean los vectores $\vec{a} = (0,2,0)$ y $\vec{b} = (0,1,\sqrt{3})$. Ambos están en el plano YZ, y en la figura E.8 puede verse fácilmente que si θ es el ángulo que forman, entonces $\cos \theta = \frac{1}{2}$, es decir, $\theta = 60^\circ$. Por lo tanto, su producto escalar será:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 2 \times \cos 60^\circ = \frac{4}{2} = 2$$

Para el caso de vectores paralelos, $\theta = 0$, lo que implica que $\cos \theta = 1$, y el producto escalar es simplemente el producto de los módulos. En particular,

un vector es siempre paralelo a sí mismo, por lo que el producto escalar de un vector por sí mismo es igual a su módulo al cuadrado:

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$$

Por el contrario, el producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero debido a que $\theta = \frac{\pi}{2}$ y $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Para ángulos menores que $\frac{\pi}{2}$ el producto escalar es una cantidad positiva, mientras que para ángulos comprendidos entre $\frac{\pi}{2}$ y π el producto escalar es una cantidad negativa. En particular, si son paralelos pero tienen sentidos opuestos, el ángulo que forman será $\theta = \pi$ y en ese caso, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -ab$. Los productos escalares entre los vectores unitarios $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ son:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \tag{E.21}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 \tag{E.22}$$

por lo que se dice que dicha base es ortonormalizada: los vectores son ortogonales dos a dos y cada uno de ellos está normalizado, es decir, es unitario. Ahora, utilizando las ecuaciones (E.21-22) se puede expresar el producto escalar de dos vectores en función de las componentes:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \cdot (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{E.23}$$

De la expresión anterior se sigue que una forma de encontrar el ángulo que forman es calculando su producto escalar en función de las componentes y dividiendo el resultado por el producto de los dos módulos:

$$\cos \theta = \frac{1}{ab} \vec{a} \cdot \vec{b} \tag{E.24}$$

Ejemplo. Retomando el ejemplo anterior, sin necesidad de ninguna representación gráfica podríamos encontrar el ángulo entre los dos vectores \vec{a} y \vec{b} :

$$\cos \theta = \frac{0 \times 0 + 2 \times 1 + 0 \times \sqrt{3}}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \text{arc cos } \frac{1}{2} = 60^\circ$$

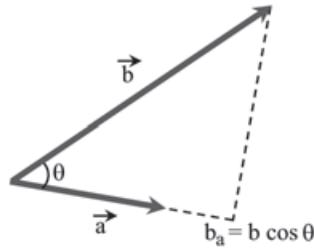


Fig. E.9. Producto escalar de dos vectores y proyección b_a del vector \vec{b} sobre la dirección del vector \vec{a} .

La proyección b_a del vector \vec{b} sobre el \vec{a} es:

$$b_a = b \cos \theta$$

por lo que puede considerarse el producto escalar como el resultado de multiplicar el módulo de un vector por la proyección del otro sobre el primero. Esta propiedad nos permite calcular la componente b_a de un vector \vec{b} sobre la dirección definida por otro vector, \vec{a} . En efecto:

$$b_a = b \cos \theta = \vec{u}_a \cdot \vec{b} = \frac{1}{a} \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}$$

6.2.6 Producto vectorial

El producto vectorial de dos vectores $\vec{V} = \vec{a} \times \vec{b}$ es otro vector con las siguientes propiedades:

Su dirección es la normal al plano que contiene a los dos vectores que se multiplican.

Su sentido es el que marca la regla del sacacorchos al mover el primer factor hacia el segundo a lo largo del camino más corto. Por lo tanto, el producto vectorial no es conmutativo, cambiando de signo su resultado si cambia el orden de los factores.

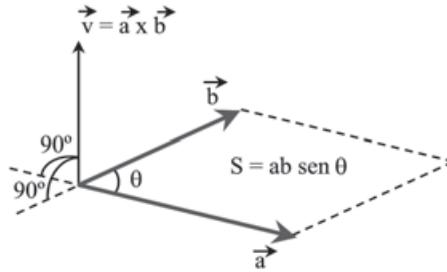


Fig. E.10. Producto vectorial de dos vectores, $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Su módulo es igual al producto de los módulos de los dos factores multiplicado por el seno del ángulo que forman (siempre comprendido entre 0° y 180°):

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \times \text{sen} \theta \tag{E.25}$$

De aquí se deduce que el módulo del producto vectorial es máximo para vectores perpendiculares ($\theta = \frac{\pi}{2}$), mientras que es cero para vectores paralelos o antiparalelos ($\theta = 0, \pi$). En la figura E.10 puede verse que el módulo del producto vectorial de dos vectores es igual al área del paralelogramo que se puede formar con ambos vectores como lados.

Ejemplo 6. Para los dos vectores del ejemplo anterior, puesto que ambos están contenidos en el plano YZ, su producto vectorial será un vector a lo largo del eje X. Al llevar el vector \vec{a} sobre el \vec{b} a lo largo del camino más corto, realizamos una rotación en el sentido contrario a las agujas del reloj, por lo que, según la regla del sacacorchos, el sentido del producto vectorial será el del semieje X positivo. Su módulo será:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = 2 \times 2 \times \text{sen} 60^\circ = 4 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

De acuerdo con la definición de producto vectorial, los productos vectoriales entre los elementos de la base son:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}; \quad \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$$

En coordenadas, tendremos:

$$\vec{V} =: \vec{a} \times \vec{b} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \times (b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k})$$

$$\vec{V} = (a_x b_y - a_y b_z) \vec{k} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i}$$

es decir:

$$V_x =: a_y b_z - a_z b_y \quad (\text{E.26})$$

$$V_y =: a_z b_x - a_x b_z \quad (\text{E.27})$$

$$V_z =: a_x b_y - a_y b_x \quad (\text{E.28})$$

Existe una forma compacta de recordar las expresiones (E.26-28) utilizando la noción de determinante de una matriz cuadrada 3×3 . En efecto, puede escribirse el producto vectorial de dos vectores en la forma:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

Ejemplo. El producto vectorial $\vec{V} = \vec{a} \times \vec{b}$ de los dos mismos vectores del ejemplo anterior es:

$$V_x = 2 \times \sqrt{3} - 0 \times 1 = 2\sqrt{3} \quad (\text{E.29})$$

$$V_y = 0 \times 0 - 0 \times \sqrt{3} = 0 \quad (\text{E.30})$$

$$V_z = 0 \times 1 - 2 \times 0 = 0 \quad (\text{E.31})$$

es decir, $\vec{V} = 2\sqrt{3}\vec{i}$

6.3 Operadores diferenciales sobre vectores

Existen magnitudes escalares, como la densidad, la masa o la energía, y otras vectoriales, como las fuerzas o los campos eléctricos o gravitatorios, que pueden depender de la posición y del tiempo. Para cada punto del espacio e instante de tiempo toman un valor. En este apartado consideraremos únicamente la dependencia espacial, suponiendo que no hay dependencia explícita del tiempo o que los cálculos se hacen a tiempo fijo. La dependencia espacial de una magnitud escalar A o una vectorial \vec{a} se expresa de la siguiente forma:

$$A = F(\vec{r}) = F(x, y, z) \quad (\text{E.32})$$

$$\vec{a} = \vec{f}(\vec{r}) = \vec{f}(x, y, z) \quad (\text{E.33})$$

siendo la ecuación vectorial (E.33) equivalente a tres ecuaciones:

$$a_x = f_x(x, y, z)$$

$$a_y = f_y(x, y, z)$$

$$a_z = f_z(x, y, z)$$

Las funciones F , f_x , f_y , f_z contienen la dependencia de las magnitudes A y \vec{a} con la posición. En lo sucesivo, para no introducir demasiados términos distintos, utilizaremos la misma letra para designar la magnitud y la función que da su dependencia en función de \vec{r} . Es decir:

$$A = A(x, y, z)$$

$$\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$$

6.3.1 Gradiente

Consideremos una cantidad escalar $A = A(x, y, z)$. Llamamos gradiente de esa cantidad a un vector $\vec{V} = \text{grad}A$, cuyas componentes son:

$$V_x = (\text{grad}A)_x = \frac{\partial A}{\partial x} \quad (\text{E.34})$$

$$V_y = (\text{grad}A)_y = \frac{\partial A}{\partial y} \quad (\text{E.35})$$

$$V_z = (\text{grad}A)_z = \frac{\partial A}{\partial z} \quad (\text{E.36})$$

donde el símbolo $\frac{\partial}{\partial x}$ es la derivada parcial respecto a x .

En una dimensión, el gradiente es simplemente la derivada de la función:

$$\text{grad}A = \frac{dA}{dx}$$

por lo que coincide con la pendiente de la curva que representa la función A en función de x .

A veces, se caracteriza el operador gradiente mediante el símbolo $\vec{\nabla}$ (nabla), de forma que:

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \quad (\text{E.37})$$

es decir:

$$\text{grad}A = \vec{\nabla}A = \frac{\partial A}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial A}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial A}{\partial z} \vec{k}$$

que coincide con la definición de operador gradiente. Nótese que el operador *grad* se aplica a un escalar y el resultado de la aplicación es un vector.

Ejemplo. Sea la función escalar:

$$A = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

La componente *x* del gradiente será:

$$(\text{grad}A)_x = \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{x}{r^3}$$

y lo mismo para las otras dos componentes. Agrupándolas todas, tendremos:

$$\text{grad}A = \vec{\nabla}A = -\frac{x}{r^3} \vec{i} - \frac{y}{r^3} \vec{j} - \frac{z}{r^3} \vec{k} = -\frac{1}{r^3} \vec{r}$$

Ejemplo. Sea la función escalar:

$$A = \frac{xyz}{r} = \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Procediendo ahora de la misma forma, calculamos la componente *x* del gradiente:

$$(\text{grad}A)_x = \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[xyz (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right] = \frac{yz}{r} - \frac{x^2 yz}{r^3}$$

y procediendo análogamente con las otras dos componentes, y agrupando, queda:

$$\text{grad}A = \bar{\nabla}A = \frac{1}{r} \left(yz\bar{i} + xz\bar{j} + xy\bar{k} - xyz \frac{\bar{r}}{r^2} \right)$$

donde se ha tenido en cuenta que $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

6.3.2 Divergencia

El operador divergencia se aplica a un vector y el resultado de su aplicación es un escalar. La definición de divergencia de un vector \bar{V} es la siguiente:

$$\text{div}\bar{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = \bar{\nabla} \cdot \bar{V} \quad (\text{E.38})$$

es decir, podemos calcular la divergencia de un vector calculando formalmente el producto escalar del operador $\bar{\nabla}$ por el vector en cuestión.

Ejemplo. Sea el vector $\bar{V} = x^2\bar{i} + xy\bar{j} + ye^{-2x}\bar{k}$. Su divergencia será:

$$\text{div}\bar{V} = 2x + x + 0 = 3x$$

Cuando el vector del que queremos calcular la divergencia es el gradiente de una cierta cantidad escalar A , la divergencia resulta ser:

$$\text{div}(\text{grad}A) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \quad (\text{E.39})$$

y en términos del operador $\bar{\nabla}$:

$$\text{div}\bar{V} = \bar{\nabla} \cdot \bar{V} = \bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla}A = \bar{\nabla}^2 A \quad (\text{E.40})$$

donde al operador $\bar{\nabla}^2$ se le llama laplaciano y se suele caracterizar con el símbolo Δ (delta mayúscula):

$$\bar{\nabla}^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{E.41})$$

Ejemplo. Consideremos la cantidad escalar:

$$A = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

cuyo gradiente calculamos anteriormente:

$$\text{grad}A = \bar{\nabla}A = -\frac{x}{r^3}\bar{i} - \frac{y}{r^3}\bar{j} - \frac{z}{r^3}\bar{k}$$

Calculemos ahora la derivada respecto de x de la primera componente de este vector:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{r^3} \right) = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -\frac{1}{r^3} - x \left(-\frac{3}{2} \right) \frac{2x}{r^5} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}$$

y procediendo análogamente con las otras dos componentes, resulta que la divergencia del gradiente de A será:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad}A) = \Delta A = -\frac{3}{r^3} + 3 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^5} = -\frac{3}{r^3} + 3 \frac{r^2}{r^5} = 0$$

6.3.3 Rotacional

El rotacional es un operador que se aplica a un vector y el resultado de la aplicación es otro vector. En términos del operador $\vec{\nabla}$, se define así:

$$\operatorname{rot}\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{V} = \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \vec{k} \quad (\text{E.42})$$

Ejemplo. Sea el vector $\vec{V} = (x^2 + y^2 + z^2)\vec{i} + z\vec{k}$. Su rotacional será:

$$\operatorname{rot}\vec{V} = 0 \times \vec{i} + 2z\vec{j} - 2y\vec{k} = 2z\vec{j} - 2y\vec{k}$$

Cuando el vector \vec{V} es el gradiente de una cierta magnitud escalar A , el rotacional resulta ser cero. En efecto:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}A) = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}A) = (\vec{\nabla} \times \vec{\nabla})A = 0$$

dado que el producto vectorial de un vector por sí mismo es siempre igual a cero. Puede verificarse directamente, a partir de la expresión de las componentes de un gradiente, que el rotacional de un gradiente es siempre cero.

Ejemplo. Consideremos la función escalar:

$$A = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

cuyo gradiente encontramos anteriormente. Calculemos la componente x del rotacional del gradiente de A :

$$[\operatorname{rot}(\operatorname{grad}A)]_x = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{z}{r^3} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{y}{r^3} \right) = \frac{3zy}{r^5} - \frac{3yz}{r^5} = 0$$

y lo mismo ocurre con las otras dos componentes.

Apéndice F. Algunas fórmulas matemáticas útiles

7.1 Trigonometría

7.1.1 Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas se definen en un triángulo rectángulo, como el de la figura F.1.

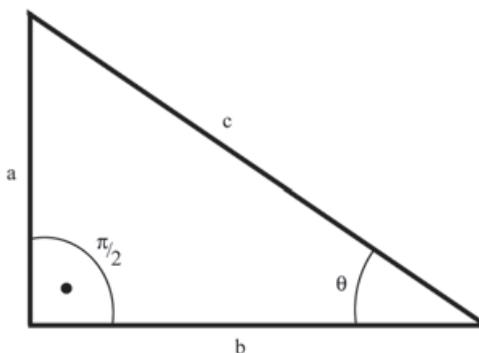


Fig. F.1. Las funciones trigonométricas se definen en un triángulo rectángulo como el de la figura, en el que la relación de los lados con el ángulo es: a: cateto opuesto al ángulo θ . b: cateto contiguo al ángulo θ . c: hipotenusa.

Seno

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{catetoopuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} \quad (\text{F.1})$$

Coseno

$$\text{cos } \theta = \frac{\text{catetocontiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \quad (\text{F.2})$$

Tangente

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\text{catetoopuesto}}{\text{catetocontiguo}} = \frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta} \quad (\text{F.3})$$

Secante

$$\operatorname{sec} \theta = \frac{c}{b} = \frac{1}{\operatorname{cos} \theta} \quad (\text{F.4})$$

Cosecante

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{c}{a} = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \quad (\text{F.5})$$

Cotangente

$$\operatorname{cot} \theta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{\operatorname{cos} \theta}{\operatorname{sen} \theta} \quad (\text{F.6})$$

Funciones trigonométricas de ángulos sencillos

a) Triángulo rectángulo de catetos iguales

Dado que α y β son iguales y que $\alpha + \beta + \frac{\pi}{2} = \pi$, implica que

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{4} (45^\circ)$$

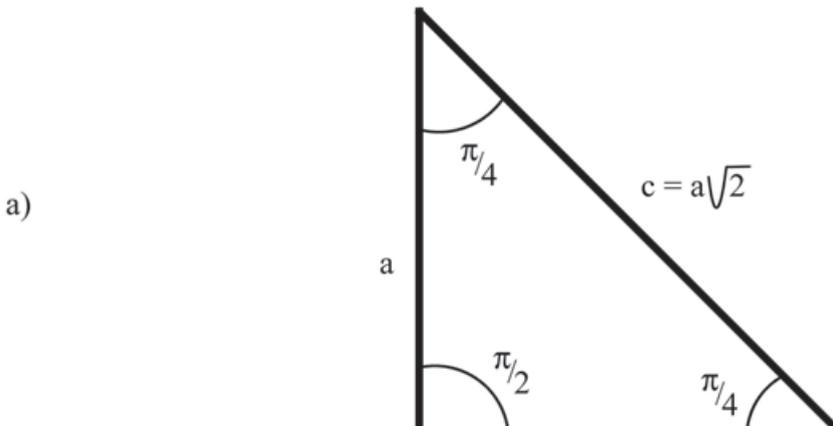


Fig. F.2. a) Triángulo rectángulo de catetos iguales. b) Triángulo equilátero.

Según el teorema de Pitágoras,

$$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \quad \Rightarrow \quad c = a\sqrt{2}$$

por tanto:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707 \quad (\text{F.7})$$

$$\operatorname{cos} \frac{\pi}{4} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707 \quad (\text{F.8})$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{a}{a} = 1 \quad (\text{F.9})$$

b) Triángulo equilátero

Dado que la suma de los tres ángulos es igual a π y que los tres son iguales, cada uno de ellos vale $\frac{\pi}{3}$ (60°). En el vértice B el ángulo se divide en dos iguales, que valen, por tanto, $\frac{\pi}{6}$ (30°) cada uno de ellos. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo BCD, se obtiene que:

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2^2}} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = a \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto:

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \operatorname{sen} 60^\circ = \operatorname{cos} \frac{\pi}{6} = \operatorname{cos} 30^\circ = \frac{h}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{F.10})$$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \operatorname{sen} 30^\circ = \operatorname{cos} \frac{\pi}{3} = \operatorname{cos} 60^\circ = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2} \quad (\text{F.11})$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{3}}{\operatorname{cos} \frac{\pi}{3}} = \sqrt{3} \quad (\text{F.12})$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}}{\operatorname{cos} \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (\text{F.13})$$

Funciones trigonométricas en una circunferencia de radio unidad

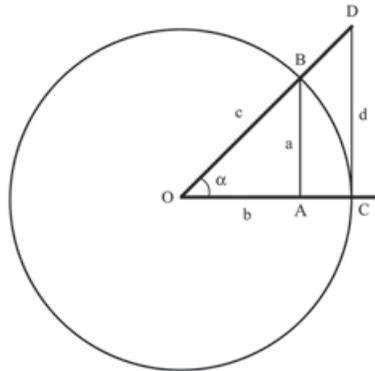


Fig. F.3. Funciones trigonométricas en una circunferencia de radio unidad.

En la figura F.3 vemos que la hipotenusa c del triángulo OAB, recto en A, es igual al radio, igual a la unidad.

Por tanto, el seno de α es igual al segmento a y el coseno es igual al segmento b . La tangente de α es igual a la longitud a dividida por la longitud b , que es igual al segmento d dividido por el segmento OC, de longitud unidad y, por tanto, igual al segmento d . Esta última propiedad se deduce del hecho de que el triángulo OCD es recto en C. Por tanto:

$$\operatorname{sen} \alpha = a$$

$$\operatorname{cos} \alpha = b$$

$$\operatorname{tg} \alpha = d$$

Ángulo negativo, complementario y suplementario

Aplicando lo anterior a los ángulos de la figura F.4.a, se obtiene:



Fig. F.4. Esquemas para la obtención de las funciones trigonométricas de ángulos relacionados.

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \quad (\text{F.14})$$

$$\operatorname{cos}(-\alpha) = \operatorname{cos}\alpha \quad (\text{F.15})$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \quad (\text{F.16})$$

Dos ángulos se denominan complementarios si su suma es igual a $\pi/2(90^\circ)$

Se deduce de la construcción de la figura F.4.b que se verifican las relaciones:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cos}\alpha \quad (\text{F.17})$$

$$\operatorname{cos}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha \quad (\text{F.18})$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{cot}\alpha \quad (\text{F.19})$$

Dos ángulos se denominan suplementarios si su suma es igual a $\pi(180^\circ)$. De la figura F.4.c:

$$\operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \quad (\text{F.20})$$

$$\operatorname{cos}(\pi - \alpha) = -\operatorname{cos}\alpha \quad (\text{F.21})$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\alpha \quad (\text{F.22})$$

7.1.2 Fórmulas trigonométricas

Del teorema de Pitágoras, aplicado al triángulo rectángulo de la figura F.1:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (\text{F.23})$$

Dividiendo por c^2 , resulta:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{cos}^2 \theta = 1 \quad (\text{F.24})$$

Funciones trigonométricas de la suma algebraica de ángulos

Puede demostrarse que para cualquier pareja de ángulos α y β ,

$$\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha \operatorname{cos}\beta \pm \operatorname{cos}\alpha \operatorname{sen}\beta \quad (\text{F.25})$$

$$\operatorname{cos}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{cos}\alpha \operatorname{cos}\beta \mp \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \quad (\text{F.26})$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} \quad (\text{F.27})$$

Cuando $\alpha = \beta$ se sigue que:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \quad (\text{F.28})$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \quad (\text{F.29})$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (\text{F.30})$$

Suma algebraica de funciones trigonométricas

Asímismo para cualquier pareja de ángulos α y β ,

$$\operatorname{sen} \alpha \pm \operatorname{sen} \beta = 2 \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \right] \cos \left[\frac{1}{2}(\alpha \mp \beta) \right] \quad (\text{F.31})$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \cos \left[\frac{1}{2}(\alpha - \beta) \right] \quad (\text{F.32})$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\alpha + \beta) \right] \operatorname{sen} \left[\frac{1}{2}(\beta - \alpha) \right] \quad (\text{F.33})$$

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} \quad (\text{F.34})$$

Ley de los senos y de los cosenos

La ley de los senos indica que se cumplen las siguientes relaciones entre los ángulos y los lados de un triángulo, como el de la figura F.5:

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{c} \quad (\text{F.35})$$

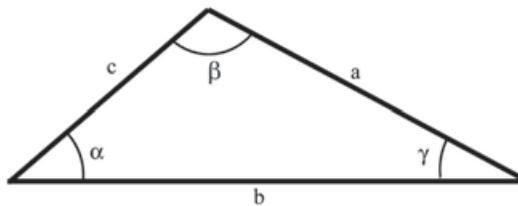


Fig. F.5. La ley de los senos y los cosenos puede aplicarse a cualquier triángulo.

Ley de los cosenos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \tag{F.36}$$

Ambas leyes se cumplen en cualquier triángulo.

7.2 Áreas y volúmenes

7.2.1 Áreas de figuras planas

Paralelogramo de base b y altura h :

$$S^v \text{ (paralelogramo)} = bh$$

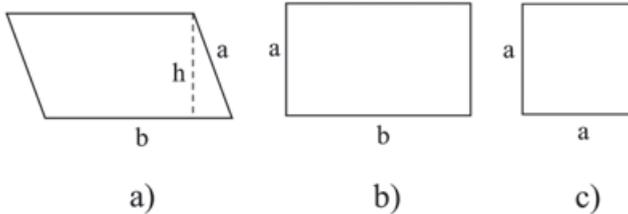


Fig. F.6. a) Paralelogramo. b) Rectángulo. c) Cuadrado.

Casos particulares: El rectángulo de lados a y b es un paralelogramo en el que, si tomamos como base el lado b , la altura es igual al lado a . Por lo tanto:

$$S^v \text{ (rectángulo)} = ab$$

El cuadrado es un caso particular de rectángulo con los cuatro lados iguales. Si la longitud de uno de éstos es a , entonces:

$$S^v \text{ (cuadrado)} = a^2$$

Triángulo de base b y altura h :

$$S^v \text{ (triángulo)} = \frac{1}{2}bh$$

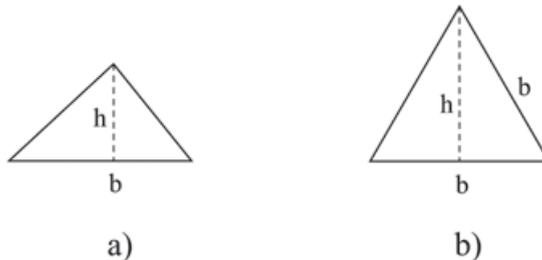


Fig. F.7. a) Triángulo. b) Triángulo equilátero.

Casos particulares: para un triángulo equilátero de lado b , el área es:

$$S^v (\text{equilátero}) = \frac{\sqrt{3}}{4} b^2$$

Trapezio de lados paralelos a y b , y altura h :

$$S^v (\text{trapezio}) = \frac{a+b}{2} h$$

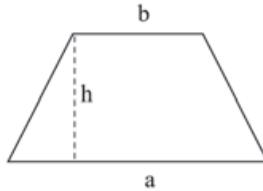


Fig. F.8. Trapecio.

Elipse de semieje mayor a y semieje menor b :

$$S(\text{elipse}) = \pi ab$$

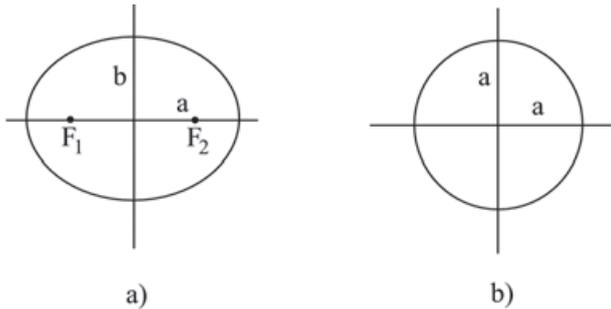


Fig. F.9. a) Elipse. Los puntos F_1 y F_2 son los focos. b) Círculo.

Caso particular: el círculo es una elipse que tiene los dos semiejes iguales, $b = a$:

$$S (\text{círculo}) = \pi a^2$$

7.2.2 Superficies y volúmenes de cuerpos tridimensionales

Paralelepípedo cuya base es un rectángulo de lados a y b , siendo dos de las cuatro caras laterales rectángulos de lados a y c los otros dos, paralelogramos de base b y altura h :

$$S (\text{paralelepípedo}) = 2(ab + ac + bh)$$

$$V (\text{paralelepípedo}) = abh$$

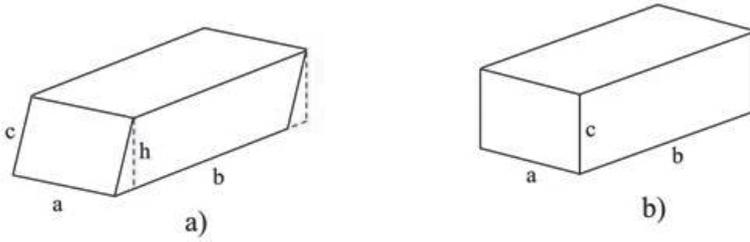


Fig. F.10. (a) Paralelepípedo inclinado. (b) Paralelepípedo recto.

Caso particular: un paralelepípedo recto es tal que la altura h es igual al lado c , por lo que:

$$S(\text{paralelepípedo}) = 2(ab + ac + bc)$$

$$V(\text{paralelepípedo recto}) = abc$$

Un cubo es un paralelepípedo recto tal que los tres lados son iguales. Si la longitud de unos de ellos es a :

$$S(\text{cubo}) = 6a^2$$

$$V(\text{cubo}) = a^3$$

Cilindro cuya base es un círculo de radio R y cuya altura es h :

$$S(\text{cilindro}) = 2\pi Rh$$

$$V(\text{cilindro}) = \pi R^2 h$$

Esfera de radio R :

$$S(\text{esfera}) = 4\pi R^2$$

$$V(\text{esfera}) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Cono cuya base es un círculo de radio R y cuya altura es h :

$$S_{\text{lateral}}(\text{cono}) = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$$

$$S_{\text{total}}(\text{cono}) = \pi R^2 + \pi R\sqrt{R^2 + h^2}$$

$$V(\text{cono}) = \frac{1}{3}\pi R^2 h$$

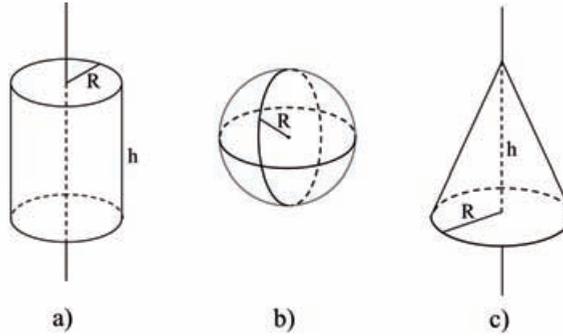


Fig. F.11. (a) Cilindro. (b) Esfera. (c) Cono.

7.3 Ecuaciones de curvas planas

7.3.1 Recta

La ecuación de una recta en el plano XY es:

$$y = mx + y_0$$

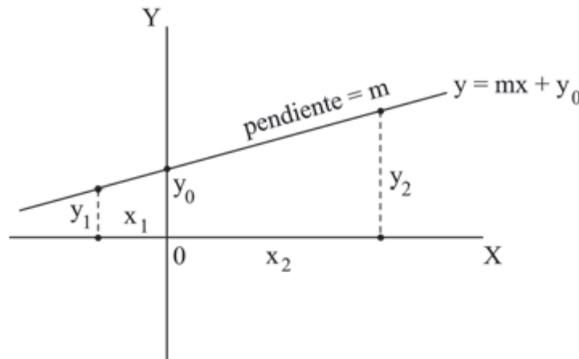


Fig. F.12. Ecuación de la recta.

El parámetro m es la pendiente de la recta, $\frac{dy}{dx} = m$, mientras que y_0 es la ordenada en el origen. Si lo que se sabe es que la recta pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , la ecuación de la curva se puede escribir en función de las coordenadas de estos puntos:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

7.3.2 Parábola

Una parábola se puede escribir, en general, de la siguiente forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

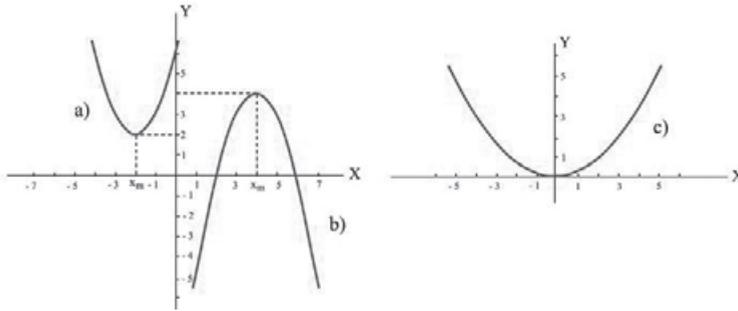


Fig. F.13. Parábolas. a) $y = x^2 + 4x + 6$, b) $y = -x^2 + 8x - 12$, c) $y = 0,2x^2$.

Si el coeficiente a es positivo, y tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $\pm\infty$ y, por lo tanto, los “cuernos” de la parábola están dirigidos hacia arriba, lo que corresponde a que la derivada segunda sea siempre positiva, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2a$, es decir, que la pendiente en cada punto aumente cuando aumenta x . Si, por el contrario, a es negativo, entonces los “cuernos” están dirigidos hacia abajo y la derivada segunda es siempre negativa. La posición del máximo (o el mínimo) de la parábola estará en un punto x_M tal que:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_M} = 2ax_M + b = 0 \Rightarrow x_M = -\frac{b}{2a}$$

$$y_M = y(x = x_M) = c - \frac{b^2}{4a}$$

Si el máximo (o el mínimo) coincide con el origen de coordenadas, entonces $x_M = y_M = 0$, lo que implica $b = c = 0$, y la ecuación de la parábola queda reducida a:

$$y = ax^2$$

Los puntos en los que la parábola corta al eje x corresponden a los puntos en los que $y = 0$ y, por lo tanto, deben satisfacer la ecuación:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

cuyas dos soluciones son las llamadas raíces del polinomio de segundo orden que caracteriza a la parábola:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si el radicando $b^2 - 4ac > 0$, hay dos soluciones reales y la parábola corta en dos puntos al eje X . Si es negativo, entonces no hay soluciones reales y la parábola no corta al eje X en ningún punto. Si es cero, entonces la parábola es tangente al eje X en un punto.

7.3.3 Elipse

Una elipse de semiejes a y b referida a un sistema de referencia cuyo origen coincide con el centro de la elipse tiene como ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{F.37})$$

Puede verse en la ecuación (F.37) que, en efecto, cuando $x = 0$, $y = \pm b$ y cuando $y = 0$, $x = \pm a$. A partir de esa expresión es posible despejar y :

$$y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Nótese que cuando $a = b$, obtenemos la ecuación de una circunferencia de radio a . Existen dos puntos singulares sobre la línea del semieje mayor llamados focos. Consideraremos el caso en que el semieje a es superior al semieje b , tal como se muestra en la figura F.9.a, de forma que los focos se encuentran sobre el eje X . Su posición es la siguiente:

$$x_F = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$$

y tienen la propiedad de que la suma de las distancias entre cualquier punto de la curva y los dos focos es una constante, igual a $2a$. De nuevo, para el caso de la circunferencia, $a = b$, los focos coinciden con el centro y la distancia entre cualquier punto de la curva y el centro es igual a $\frac{2a}{2} = a$, el radio de la circunferencia.

7.4 Exponenciales y logaritmos

7.4.1 La función exponencial

La exponencial se define de la siguiente forma

$$f(x) = e^x$$

siendo e un número trascendente (con infinitas cifras decimales no recurrentes):

$$e = 2,71828\dots$$

La función exponencial tiene la propiedad de que su derivada es igual al valor de la función en cualquier punto:

$$\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$$

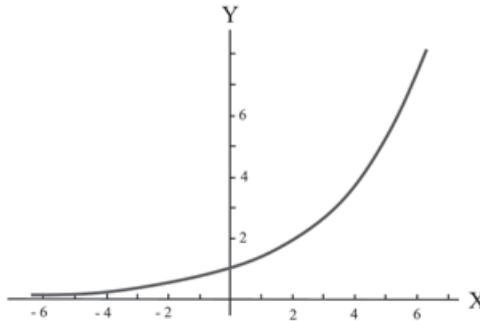


Fig. F.14. Función exponencial: $y = e^{\frac{1}{3}x} = 10^{0,145x}$.

La función exponencial crece con x más rápidamente que cualquier potencia de x , es decir:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$$

para cualquier valor de n . El producto de exponenciales cumple la ecuación:

$$e^x e^y = e^{x+y}$$

Si λ es un número, entonces la función $e^{\lambda x}$ es tal que su derivada en cada punto es igual a la propia función multiplicada por λ :

$$\frac{d(e^{\lambda x})}{dx} = \lambda e^{\lambda x}$$

y, por lo tanto, cualquier función que varíe de forma proporcional al valor de la propia función, como ocurre en el caso de las desintegraciones nucleares (ver el capítulo 23), es una exponencial. Del hecho de que $e \simeq 10^{0,4343}$ se sigue que:

$$e^x \simeq 10^{0,4343x}$$

Otras expresiones de interés son:

$$e^{2,303x} = 10^x$$

$$e^{0,6931x} = 2^x$$

$$e^{-0,6931x} = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$e^x = 2^{1,443x}$$

7.4.2 El logaritmo neperiano

La función inversa de la exponencial es el llamado logaritmo natural o neperiano:

$$e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y \quad (\text{F.38})$$

de donde se sigue que:

$$\ln(e^x) = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

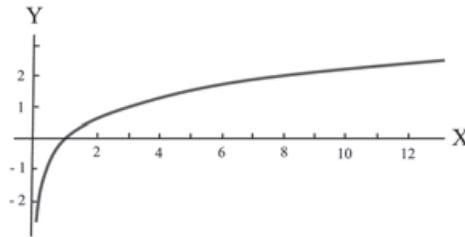


Fig. F.15. Función logaritmo: $y = \ln x = 2,303 \log x$

El logaritmo neperiano sólo está definido para valores positivos del argumento ($e^x = y$ es una cantidad siempre positiva). Algunas de sus propiedades son:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln x^a = a \ln x$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln 2 = 0,69314\dots$$

$$\ln 10 = 2,30258\dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln x) = +\infty$$

7.4.3 El logaritmo decimal

Pueden definirse el logaritmo decimal de forma análoga al neperiano, mediante la expresión:

$$10^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log y$$

La relación entre ambos logaritmos es sencilla:

$$\ln y = \ln 10^x = x \ln 10 \simeq 2,303 \times x = 2,303 \log y$$

y, por lo tanto, el logaritmo neperiano de una cantidad es siempre igual a 2,303... multiplicado por el logaritmo decimal de esa misma cantidad y las propiedades de ambos son análogas:

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

$$\log x^a = a \log x$$

$$\log e = 0,43429\dots$$

$$\log x \simeq 0,434 \ln x$$

$$\log 1 = 0$$

$$\log 2 = 0,30103\dots$$

$$\log 10 = 1$$

$$\log x \simeq 0,4343 \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\log x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\log x) = +\infty$$

7.5 Sucesiones

7.5.1 Sucesión aritmética

Llamamos sucesión aritmética a una serie de números $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, tal que cada uno de ellos es igual al anterior más una cantidad constante que llamamos razón, r :

$$a_n = a_{n-1} + r = a_{n-2} + 2r = \dots = a_0 + nr$$

La suma de los $N + 1$ primeros términos de la sucesión tiene la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^N a_n = \frac{a_0 + a_N}{2} (N + 1) = a_0 (N + 1) + \frac{N(N + 1)}{2} r$$

Ejemplo. Los números naturales (más el cero), 0, 1, 2, 3, ..., forman una sucesión aritmética de razón $r = 1$. El primer término será $a_0 = 0$ y el término n será $a_n = n$. La suma de los 100 primeros números naturales, por ejemplo, será:

$$\sum_{n=0}^{100} n = \frac{100 \times 101}{2} = 5.050 \quad (\text{F.39})$$

Los números pares forman otra sucesión aritmética de razón 2 en la que el primer valor es $a_0 = 0$ y el término general es $a_n = 2n$. La suma de los $M + 1$ primeros números pares (que son 0, 2, 4, ..., $2M$) es:

$$\sum_{n=0}^M a_n = \frac{M(M + 1)}{2} 2 = M(M + 1)$$

Si consideramos ahora $M = 50$, el último número de la serie será el 100 y su suma será:

$$\sum_{n=0}^{50} (2n) = \frac{50 \times 51}{2} 2 = 51 \times 50 = 2.550$$

Por su parte, los números impares forman también una sucesión geométrica de razón 2. Si tomamos como primer valor $a_0 = 1$, el término general será $a_n = 1 + 2n$. Si queremos sumar todos los impares hasta el 99 incluido, debemos tomar $M = 49$ y su suma será:

$$\sum_{n=0}^{49} (2n+1) = 1 \times 50 + \frac{49 \times 50}{2} = 2.500$$

Nótese que la suma de los números pares, desde el 0 hasta el 100, más la de los números impares, desde el 1 hasta el 99, da la suma total (F.39) de los 100 primeros números naturales.

7.5.2 Sucesión geométrica

Llamamos sucesión geométrica a una serie de números $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, tal que cada uno de ellos es igual al anterior multiplicado por una cantidad constante que llamamos razón, r :

$$a_n = a_{n-1} \times r = a_{n-2} \times r^2 = \dots = a_0 \times r^n$$

Así, cuando se habla de que una magnitud crece en progresión geométrica se quiere decir que, en cada intervalo constante de tiempo, se multiplica por una cantidad fija que es la razón r . La suma de los N primeros términos de la sucesión tiene la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^N a_n = \frac{a_N \times r - a_0}{r - 1} = a_0 \frac{r^{N+1} - 1}{r - 1}$$

Cuando N tiende a infinito, la serie diverge y la suma se hace infinita para el caso de que $r \geq 1$, mientras que converge cuando $r < 1$. En este último caso, $r^{N+1} \rightarrow 0$, con lo que resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \frac{a_0}{1 - r}$$

Ejemplo. *Considérese una sucesión tal que la razón sea $r = e^\lambda$ y el primer término sea igual a 1. El término n -ésimo será:*

$$a_n = e^{n\lambda}$$

y la suma de la serie será:

$$\sum_{n=0}^N e^{n\lambda} = \frac{e^{\lambda(N+1)} - 1}{e^\lambda - 1} \tag{F.40}$$

Cuando tomamos el límite $N \rightarrow \infty$, si $\lambda \geq 0$, entonces la exponencial que aparece en el numerador del segundo miembro de la ecuación (I.4) tiende también a infinito, mientras que si $\lambda < 0$, la suma queda:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{n\lambda} = \frac{1}{1 - e^{-|\lambda|}}$$

Ejemplo. Sea ahora la sucesión $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$. Se trata de una pro
gresión geométrica de razón igual a $\frac{1}{2}$. Por lo tanto:

$$\sum_{n=0}^N \frac{1}{2^n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$$

y en el límite cuando $N \rightarrow \infty$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1} \rightarrow 0$, con lo que la suma infinita resulta:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Glosario

- Abductina, 52
- Acción y reacción, 49
- Accipitridae*, 10
- Aceleración, 11
 - angular, 30, 34, 156, 162
 - centrífuga, 133
 - centrípeta, 27, 30, 133
 - de la gravedad en otros astros, 105
 - de la gravedad, 11, 31, 41, 104, 190, 269
 - normal, 27, 34
 - Órganos de percepción de la, 33
 - promedio, 13
 - tangencial, 27
- Acetábulo, 124, 182
- Ácido láctico, 63
- Ácido pirúvico, 63
- Acinonix jubatus*, 8
- Acrididae*, 15, 21
- Actina, 56, 68
- Adimensional, Magnitud, 270
- Águila, 10, 43, 131
- Alcance máximo, 24, 191
- Alometría, 277

- Ameba, 268
- Amortiguador, 261
- Amplitud, 248
 - de las oscilaciones forzadas, 251
- Ampolla, 34
- Análisis dimensional, 268
- Ángulo de inserción, 177, 198, 204
- Antílope, 9
- Aorta, 83, 322, 330
- Apófisis espinosa, 186
- Araña, 51
- Arco, Longitud de, 8
- Ardeotis kori*, 303
- Ardilla, 195, 305, 313
- ARNm, 138
- Arquero, 19
- Arquímedes, Empuje de, 129, 137, 282
- Arrastre, Coeficiente de, 130, 143
- Arteria, 83, 112, 330
- Articulación, 20, 33, 52, 124, 166, 178, 186, 243
- Antrópodo, 20, 160, 168, 282
- Astronauta, 31, 46, 80, 110, 190
- Athous*, 19
- Átomo, 39, 233
- ATP, 63
- Ave, 10, 175, 295, 305, 314, 347, 351
 - paseriforme, 318
- Avestruz, 9, 239, 318
- Avogadro, Número de, 39
- Avutarda de Kori, 303

Axón, 75

Longitud del, 264

Bacteria, 127, 265

Balístocardiografía, 82

Ballena, 10, 127, 265, 292, 317

Baluchitherium, 266

Bergmann, Regla de, 313

Bíceps, 53, 173, 180, 217

Big Bang 39, 307

Bioestática, 175

Biomaterial, 288

Bípedo, 168

Borelli, 166

Bóvido, 298

Braquisaurio, 266

Buceador, 127

Caballo, 9, 169, 239, 264

Caballo de vapor (unidad), 215

Cabra, 171

Cadera, 168, 174, 180

Caída libre, 31, 87, 108, 131

Calamar, 73

Calcáneo, 204

Caloría (unidad), 215

Camello, 9

Campo Centrífugo Relativo, 135

Campo gravitatorio, 47, 120

Canales semicirculares, 33

- Canguro, 9, 16, 22
- Cantidad de movimiento, 69
- Capilar, 321
- Carpa, 66, 219
- Carrera y marcha, 192
- Catapulta, Mecanismo de, 20
- Cavendish, Balanza de, 104
- Cefalópodo, 77
- Célula
 - ciliada, 34
 - muscular, 68
 - Tamaño de una, 268
- Centrífuga
 - de entrenamiento, 31, 118
 - de experimentación, 146
- Centro de gravedad, 31, 94, 100, 203
- Centro de masas, 77
 - de una persona, 166
 - Determinación experimental del, 165
- Cerebro, 33, 281
 - Tamaño relativo del, 281
- Ciclóstomo, 38
- Ciervo, 239
- Cilindro, Área y volumen del, 273
- Cinetocilio, 35
- Circulación de la sangre, 329
 - en ingravidez, 111
- Clavícula, 176
- Cóclea, 36
- Colágeno, 54, 75

- Colibrí, 219, 303, 318, 332
- Columna vertebral, 185, 206
- Connochaetes*, 9
- Cono, Área y volumen del, 377
- Constante de recuperación, 245
- Constante del movimiento, 69, 152, 249
- Contracción muscular, 59
- Copérnico, Sistema heliocéntrico de, 106
- Coral, 282
- Corazón, 39, 83, 271
- Cresta ampular, 34
- Cuádriceps, 67, 287
- Cuervo, 318
- Cyprinus carpio*, 66
-
- Chimpancé, 239
- Choque, 70, 86
-
- Damaliscus*, 9
- Delfín, 10
- Deltoides, 176
- Densidad de los animales, 254
- Diástole, 83, 334
- Dinosaurio, 192, 206, 265, 282
- Discos Z, 56
- Dosidus gigas*, 76
-
- Eficiencia metabólica, 218
- Einstein, 102, 109
- Elateridae*, 19

- Electronvoltio (unidad), 215
- Elefante, 9, 266, 283, 293, 305, 316, 330, 339
- Endoesqueleto, 263
- Endolinfa, 34
- Energía, 211
 - cinética, 219
 - Conversación de la, 72, 220, 234, 312
 - elástica, 19, 241
 - metabólica, 226, 259
 - potencial, 220, 228, 232
 - química, 63, 235
- Epífisis, 124, 184
- Equilibrio, 162
 - en las personas, 166
- Ergio (unidad), 215
- Escápula, 179
- Escarabajo de resorte, 20
- Escherichia Coli*, 266
- Esfera, Área y volumen de la, 377
- Esfuerzo, 88
 - de rotura, 88, 283
 - máximo, 285
- Espermatozoide, 130
- Esqueleto, 20, 51, 281
- Esquiador, 255
- Estación Espacial Internacional, 110
- Estatocistos, 38
- Estatolitos, 38
- Estereocilio, 36
- Estrella, 306

- de neutrones, 105
- Exoesqueleto, 263
- Extensión plantar del pie, 173

- Factor de seguridad frente a impactos, 285
- Factor de trabajo, 188
- Falconidae*, 10
- Fase, 248
- Felino, 9, 180
- Fémur, 122, 182, 204
- Fibra muscular, 54
 - lenta y rápida, 63
- Filamentos, 57
- Foca, 10
- Fosforilación oxidativa, 63
- Fractal, Modelo, 320
- Frecuencia, 29
 - cardiaca, 330
 - de un oscilador, 250
- Froude, Número de, 190, 206, 271
- Fuerza, 45
 - centrífuga, 117
 - centrípeta, 110, 117, 213
 - conservativa, 224
 - de contacto, 114
 - de rozamiento, 120, 125, 130, 194, 224, 242
 - proporcional a la velocidad, 127, 132, 250
 - proporcional al cuadrado de la velocidad, 27, 130, 242, 258
 - de sustentación, 302
 - del oscilador armónico, 245

derivada, 51, 102, 126
elástica, 102, 114
ficticia, 134
gravitatoria, 102, 140, 223, 229
muscular, 51, 184, 216, 238, 276, 292
muscular específica, 217
muscular y velocidad de contracción, 61, 66, 218
periódica sobre un oscilador, 252
relativa de un animal, 292

Gacela, 19

Gálago, 18, 22, 296, 308

Galgo, 9, 308

Galileo, 46

 y las leyes de escala, 284

Gastrocnemio, 204

Gato, 40

 Giros en caída del, 157

Gazella, 9

Gigavatio (unidad), 215

Glóbulo rojo, 112, 129, 321, 329

 Densidad y tamaño, 129

Glúteo mayor, 182

Glicocola, 20

Glucógeno, 63

Glucosa, 235

Gorrión, 318

Gramo (unidad), 47

Gravitación Universal

 Constante de la, 104

- Grillo, 21
- Guepardo, 9
- Gulliver, 272, 279, 316
- Gusano, 54, 282

- Halcón, 10
- Halterofilia, 277
- Hemoglobina, 138, 144, 280, 329
- Hercio (unidad), 29, 250
- Hidrógeno, Átomo de, 78
- Hill
 - Fórmula de, 62, 241
 - Modelo de, 237
- Homeotermo, 317
- Hooke, Ley de, 246
- Hormiga, 292, 300
- Hueso, 54, 88, 184, 283
 - en ingravidez, 111
- Húmero, 176

- Ilion, 182, 186
- Impulso o impulsión, 69
- Ingravidez, 108
- Inhalación pulmonar, 327
- Insectívoro, 298
- Insecto, 20, 170, 198, 297
- Interacción
 - electromagnética, 101
 - gravitatoria, 102
- Isometría, 272

Isquion, 182

Julio (unidad), 213

Kepler, Johannes, Leyes de, 107

Kilogramo (unidad), 47

Kilovatio (unidad), 215

Kilovatio hora (unidad), 215

Kleiber, Max, 312

Ley de, 312, 319, 327, 339

Lagrange, Punto de, 140

Langosta, 38

Lanzamiento

de peso, 26,

de martillo, 42

Lémur, 124

Levantamiento de peso, 277

Leyes de escala, 263, 311

alométricas, 277,

isométricas, 272

Liebre, 9

Lignina, 267

Liliputiense, 272, 279, 316

Líquido sinovial, 243

Lobo, 9

Locomoción, 187

por inercia, 237

Loligo, 75

Luna

Gravedad sobre su superficie, 190, 269

Máculas acústicas, 36

Magnitud cinemática, 69

Mamífero, 280, 290, 298, 314, 327, 337

marino, 127, 292

Marsupial, 333

Marte, 105, 144

Masa (inercial), 47

McMahon, Modelo de, 319

Medusa, 38, 77

Megavatio (unidad), 215

Metabolismo, 311

aerobio y anaerobio, 66

Metro (Unidad), 4

Microcebus, 124

Microorganismo, 127

Mioblasto, 68

Miofibrilla, 55

Mioglobina, 52

Miosina, 56

Mitocondria, 263, 318

Moho del fango, 2290

Molusco, 38

bivalvo, 52, 60

Momento, 69

Conservación del, 68

Momento angular,

Conservación del, 152

- respecto de un eje, 150
- Momento de inercia, 149
 - de un cilindro, 156
 - de un disco, 196
 - de una esfera, 197
 - de una moneda, 197
 - de una puerta, 151
 - de una varilla, 151
- Momento de una fuerza, 152
- Momento lineal, 69
- Mono antropomorfo, 282
- Montaña rusa, 221
- Motoneurona, 251
- Movimiento
 - bidimensional, 22
 - circular, 28, 110, 148
 - finito, 231
 - infinito, 231
 - parabólico, 22, 85
 - unidimensional, 3
 - uniforme, 12
 - uniforme y rectilíneo, 12, 46, 80
 - uniformemente acelerado, 22
- Muelle, 204, 247
- Murciélago, 278, 302, 325
- Musaraña, 283, 322, 335
- Músculo
 - antagonista, 52, 179, 217
 - cardíaco, 55
 - en ingravidez, 111

- esquelético, 54
- estriado, 56
- extensor, 52, 258
- flexor, 52, 178
- liso, 55
- Mycoplasma*, 265

- Neurona, 264
 - motora, 55
- Newton
 - Carro de, 97
 - Constante de, 103, 306
 - Fuerza de, 104
 - Leyes de, 59, 82, 134, 148
- Newton (unidad), 48

- Ñu, 9

- Órbita
 - de los cometas, 106
 - de los planetas, 106
 - terrestre, 106
- Oreotragus oreotragus*, 171
- Oscilaciones
 - amortiguadas, 250
 - forzadas, 250
- Oscilador armónico, 245
 - Periodo del, 249
- Ósmosis, 290
- Otoconios, 37

Otolitos, 37

Oxígeno

Concentración en sangre, 334

Consumo de, 217, 243, 299, 311, 316, 326

Palanca, 171

Paloma, 333

Pandeo, 288

Par de fuerzas, 162

Paracaídas, 90, 132, 143

Pascal (unidad), 60

Paso

antálgico, 185

Frecuencia de, 188

Longitud de, 187, 192, 206

Patinadora, 155

Pectinidae, 53

Pelvis, 185

Péndulo

Periodo del, 269

Péndulo invertido, Modelo del, 190

Periodo, 29

Periodo de gestación, 271

Peroné, 204

Peciolo, 321

Pez, 38, 66, 127

Philaenus spumarius, 19

Pingüino, 318

Pinzón, 318

Pipistrellus pipistrellus, 333

- Planck, 306
- Plasma sanguíneo, densidad y viscosidad, 129
- Poiquilotermo, 317
- Potencia, 214
 - metabólica, 237, 259, 299
 - muscular, 218
 - muscular específica, 241, 253
- Potencial
 - Curvas de, 231
- Precesión de los equinoccios, 108
- Presión
 - arterial, 322, 330
- Primate, 22, 124, 169, 195, 207, 239, 281
- Proceso semilunar, 20
- Propulsión a chorro, 73
- Pubis, 182
- Pulex*, 19
- Pulga, 16, 22, 295
- Pulsación, 248
- Punto de retorno, 229, 246

- Quitina, 54

- Rana, 18, 60, 97
- Ratón, 9, 61, 265, 288, 305, 316
- Rayleigh, Lord, 306
- RCF, 135
- Regla del sacacorchos, 2, 152, 362
- Rendimiento mecánico del metabolismo, 237
- Reptil, 38, 281, 300, 333

Resilina, 19, 254

Resonancia, 252

Reynolds, Número de, 126, 130, 271

Ribosoma, 137

Riñones, 8112, 325

Ritmo cardíaco, 280, 331

Ritmo metabólico, 311, 324

Roedor, 43, 279

Rotor, 133

Rotura por compresión, 88

Rozamiento

 Coficiente de, 121

 Coficientes estático y dinámico, 122, 199, 243

 de un sólido en un fluido, 128

 entre dos superficies sólidas, 121

Sístole, 83, 334

Sóleo, 204

Sacro, 186

Sacroespinal, Músculo, 186

Sáculo, 33, 111

Saltamontes, 15, 21, 60

Salto

 con pértiga, 256

 de altura, 17, 227

 de longitud, 86

 de trampolín, 157, 198

 en tirabuzón, 159

 en vertical, 15

 mortal, 158, 199

- Sarcómera, 56, 61
- Satélites artificiales, 110
- Schistocerca gregaria*, 21
- Sciurus*, 124
- Secuoya gigante, 267
- Sedimentación, 129
 - Coficiente de, 137
 - en un gradiente de densidad, 135
- Segundo (unidad), 5
- Selasphorus scintilla*, 332
- Semejanza
 - elástica, 286, 319
 - estática, 284, 290
 - geométrica, 277, 285
- Sinovial, Líquido, 122
- Siphonaptera*, 16
- Sistema aislado, 68
- Sistema circulatorio, 320, 329
- Sistema de referencia, 2
 - bien orientado, 2
 - inercial, 45
 - no inercial, 109
- Sistema Internacional de Unidades (SI), 4, 18
- Sistema respiratorio, 324
- Sorex cinereus*, 334
- Stokes, Ley de, 128, 132
- Suncus etruscus*, 331
- Supecficie
 - de sustentación, 167, 189
 - Regla de la, 312

Svedberg (unidad), 137

Tamaño de los organismos, 315

Tasa metabólica, 234, 313

 basal, 234, 313

 de campo, 312, 339

 en reposo, 234, 313

 específica, 316, 328, 336

 máxima, 324

 media, 236

Tendón, 54

 de Aquiles, 167

Tensión

 de una cuerda, 116

 superficial, 263

Tettigoniidae, 21

Tibia, 88, 90, 204

Tiburón, 10

Tiempo

 de circulación de la sangre, 324

 fisiológico, 325

 medio de vida, 325

 metabólico, 325

Tierra, 61

 Giro alrededor del Sol, 5, 30

 Longitud del meridiano, 4

 Masa de la, 50

 Velocidad de escape, 31

Tigre, 308

Tiro bombeado y rasante, 25

- Tobillo, 88, 166
- Tortuga, 61, 66, 188, 282
- Tríceps, 53, 172, 179, 204, 217
- Trabécula esponjosa, 184
- Trabajo, 211
 - del corazón, 333
 - muscular, 225, 298
- Trampolín, 159
- Transición marcha-carrera, 190

- Trayectoria, 3, 6, 12, 23, 27, 85, 105
 - cinemática, 23
 - geométrica, 23
 - parabólica, 34, 85
- Trocánter mayor del fémur, 183
- Tronco de un árbol, 289

- Ungulado, 290
- Unidad Astronómica (UA), 107, 140
- Unidad motora, 45
- Unidades
 - de longitud, 4
 - de masa, 47
 - de tiempo, 5
 - Sistema Internacional, 5, 47
- Utrículo, 37, 111

- Vértebra, 54, 187
 - lumbar, 187
- Vatio (unidad), 214

Vector

- posición, 2, 6, 28

- unitario, 26, 103

Velocímetro,

Velocidad, 6

- angular, 28, 35, 119, 137

- de contracción muscular, 251

- de despegue, 16, 297

- de desplazamiento de los animales, 8

- de escape, 31

- de sedimentación, 129

- de transición marcha-carrera, 190

- del flujo sanguíneo, 323

- instantánea, 7

- límite, 91, 128, 131, 190, 244

Vestíbulo, 33

Virus, 265

- de la polio, 138

Viscosidad, 126, 323

Zancada, 188, 191, 238

Zorro, 9

Fundamentos físicos de los procesos biológicos es, como su nombre indica, un texto que desarrolla la fundamentación física de los procesos que se desarrollan en el seno de los organismos vivos y en los intercambios de éstos con su entorno. Está concebido para servir como libro de texto para estudiantes de primeros cursos de las licenciaturas de ciencias de la vida y de la salud. El nivel de la exposición está graduado para que ésta pueda ser entendida aun cuando se carezca de cualquier conocimiento previo de Física, por lo que todas las nociones que es preciso manejar son definidas y analizadas progresivamente en el libro. El texto reúne un conjunto de conocimientos que se encuentran muy dispersos en la literatura disponible, de forma que pueda adaptarse a la distinta duración de los cursos en que aparecen estos contenidos, así como a las peculiaridades propias de cada universidad y titulación. La extensión del libro permite que el profesor seleccione los temas que considere más aconsejables para su programa. Pretende también este texto seguir siendo útil como libro de consulta a lo largo de todo el periodo de formación universitaria para aclarar las bases físicas de gran parte de la actividad de los seres vivos. El libro está organizado en 23 capítulos que estudian, entre otros temas, desde las leyes del movimiento y la fuerza en los seres vivos, el equilibrio y la locomoción, las leyes de escala, el balance energético y el metabolismo, los mecanismos de regulación térmica o la difusión de gases y líquidos en los seres vivos, hasta las propiedades de los biomateriales, el transporte a través de las membranas celulares, la propagación de los impulsos nerviosos, la física de la visión o los efectos biológicos de la radiación.

Se incluyen numerosos ejemplos junto con unos 250 ejercicios propuestos, orientados a facilitar el trabajo personal del estudiante. Está acompañado de más de 500 ilustraciones y 6 apéndices en los que se resumen las diversas fórmulas y técnicas matemáticas que se emplean en el texto.

Los autores, con una larga experiencia como profesores de la disciplina en la Universidad Autónoma de Madrid, han contado con la generosa y enriquecedora colaboración y sugerencias de los profesores de Biología y Medicina de su universidad.

Raúl Villar (Madrid, 1948) es catedrático de Física de la Materia Condensada en la Universidad Autónoma de Madrid, de la que ha sido rector de 1994 a 2002. Ha enseñado Física en primer curso de Biología durante los últimos quince años, y Física para Humanistas durante seis años. También ha impartido durante varios años Termodinámica y Física Estadística. Como investigador, es especialista en las propiedades de sólidos a muy bajas temperaturas.

Cayetano López (Madrid, 1946) es catedrático de Física Teórica de la Universidad Autónoma de Madrid, de la que ha sido rector. Ha enseñado Física de los Procesos Biológicos en primer curso de la licenciatura de Ciencias Biológicas desde hace más de quince años. También ha enseñado Física Cuántica, Teoría Cuántica de Campos y Física de Partículas Elementales. Además de sus trabajos científicos es autor de multitud de artículos sobre diversos temas científicos y autor de dos libros de divulgación: *El Ogro Rehabilitado*, (El País-Aguilar, 1995) y *Universo sin fin* (Taurus, 1999).

Fernando Cussó (Madrid, 1952) es catedrático de Física Aplicada de la Universidad Autónoma de Madrid. Desde el año 1975 ha impartido docencia de Física en el primer curso de Biología, Química, Matemáticas y Física, siendo responsable de la adecuación de la enseñanza experimental en Física de los Procesos Biológicos. Ha impartido también las asignaturas de Electromagnetismo y Óptica. Su actividad investigadora se ha centrado en el campo de las propiedades ópticas de los materiales.